LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Percorso interdisciplinare matematica-fisica

Barbara Palladini - V P
Liceo Scientifico Dall'Aglio

a.s. 2007/2008

Indice

Capitolo 1

Introduzione

1.1 La nascita della geometria

Già gli antichi Egizi e i Babilonesi conoscevano qualche rudimento di geometria: sapevano calcolare aree e volumi e conoscevano il teorema di Pitagora addirittura molti anni prima che Pitagora stesso lo dimostrasse. Non si trattava ancora di uno studio sistematico e accademico, nasceva piuttosto da esigenze essenzialmente pratiche, ad esempio calcolare l'estensione dei campi o ridisegnare i confini dopo le piene del Nilo. Si può dire che queste civiltà abbiano elaborato una sorta di geometria ante litteram: nonostante i loro metodi fossero inevitabilmente poco precisi, nacquero comunque da una primitiva forma di *astrazione*. L'idea di 'cerchio' avrebbe avuto poco senso per i Babilonesi, eppure essi hanno dimostrato di riuscire a separare le cose dalle loro caratteristiche, ovvero di riconoscere le *forme* generali che trascendono gli oggetti.

Questo passaggio venne più tardi formalizzato dai Greci, che iniziarono a fare un uso abituale degli *enti geometrici astratti*. Talete è oggi considerato il precursore della geometria occidentale, ma il salto di qualità è avvenuto tre secoli dopo grazie alla **teoria delle Idee** di Platone e alla **logica aristotelica**. Le Idee platoniche sono puri concetti, ognuna di esse è una matrice per tutti gli enti terreni che le somigliano. Nel mondo concreto non esistono veri triangoli, ma esistono infiniti enti materiali che hanno forma di triangolo, pur essendo diversi tra loro: in comune hanno la caratteristica che definisce l'*idea* di triangolo, *il* triangolo, cioè l'avere tre lati. Questa astrazione ci permette di definire tutti gli enti geometrici. Grazie ad Aristotele, allievo di Platone, possiamo anche creare una classificazione gerarchica di concetti: avremo dunque la classe dei poligoni, che comprende tra le altre la classe dei triangoli e dei quadrilateri, la quale a sua volta comprende trapezi, parallelogrammi, quadrati...
Una volta definiti e categorizzati i concetti, Aristotele ci dice anche come utilizzarli. Affermando o negando qualcosa circa un concetto, noi enunciamo un *giudizio*. I giudizi sono la forma elementare e irriducibile del processo cognitivo, e possono essere soltanto o veri o falsi. Tuttavia, per arrivare alla conoscenza, l'Uomo deve connettere i giudizi tra loro mediante rapporti di causa ed effetto: in poche parole, deve *ragionare*. Il ragionamento corretto si presenta nella forma del *sillogismo*, che fa scaturire da un certo numero di premesse le loro necessarie conseguenze.
Premessa maggiore: ogni volta che nevica, fa freddo.
Premessa minore: oggi nevica.

Conclusione: $\Rightarrow$ oggi fa freddo.

È importante sottolineare che la validità del sillogismo prescinde dalla veridicità delle premesse:
Premessa maggiore: tutti i gatti sono grigi.
Premessa minore: Poldo è un gatto.
Conclusione: $\Rightarrow$ Poldo è grigio.
In questo caso le premesse sono infondate (non è vero che tutti i gatti sono grigi), ma il ragionamento è comunque corretto. L'affermazione, infatti, è valida in virtù della sua forma, non in virtù dei termini particolari che la compongono. Le proposizioni logiche sono date a priori anche senza uno studio del mondo reale: nonostante questo possa sembrarci assurdo e contrario al senso comune, non va dimenticato che la logica è puramente formale.

Questa caratteristica della logica si riverbera sulla geometria. Proprio creando un sistema formale, Euclide ha reso possibile la geometria che noi conosciamo.

1.2 Euclide

"Quod gratis adfirmatur, gratis negatur"
"Ciò che viene affermato senza prova, può anche essere negato."
Euclide d'Alessandria

Come già visto, Euclide non è il primo matematico della storia ad occuparsi di geometria. Tuttavia è il primo a realizzare un trattato di matematica e geometria che raccoglie e organizza anche le conoscenze già acquisite, integrandole in un sistema formale molto rigoroso.

Questo trattato, gli *Elementi*, consta di tredici libri che passano in rassegna gli argomenti della matematica tradizionale: la geometria piana e solida, la similitudine, la teoria dei numeri. Utilizzando come base la logica aristotelica, Euclide espone la materia attraverso il **metodo assiomatico-deduttivo**: partendo dalle *definizioni* degli enti geometrici, contenute nel primo libro, e da alcuni *assiomi*, egli crea una teoria deducendo i *teoremi* dalle necessarie conseguenze degli assiomi.

1.2.1 Definizioni

Le definizioni sono anche dette **termini**, e descrivono gli enti a partire dal loro modello ideale. Se vogliamo comunicare una teoria senza che sorgano equivoci per la sua comprensione, dobbiamo definire con esattezza gli oggetti di cui tratteremo prima che il discorso sia avviato. Ma queste definizioni sono davvero fondamentali? Affermando che *il punto è ciò che non ha parti*, infatti, Euclide non ci spiega cosa significhi 'avere parti'. Per spiegare il concetto di 'avere parti' avremmo però bisogno di un'altra definizione, che a sua volta conterrebbe altri termini non definiti in precedenza, e così via. Dobbiamo quindi ammettere la presenza di termini primitivi che si fondano sull'esperienza comune: tutti infatti immaginano intuitivamente cosa sia un punto. Le definizioni euclidee, dunque, in parte si fidano della loro evidenza. Le prime otto sono le più interessanti, perché introducono i concetti basilari della materia:

Definizione 1. *Il punto è ciò che non ha parti.*

Definizione 2. *La linea è una lunghezza senza larghezza.*

Definizione 3. *Gli estremi di una linea sono due punti.*

Definizione 4. *Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa.*

Definizione 5. *Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.*

Definizione 6. *Estremi di una superficie sono linee.*

Definizione 7. *La superficie piana giace ugualmente rispetto alle rette su di essa.*

Definizione 8. *Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non siano in linea retta.*

Nelle definizioni 9-22 Euclide passa a definire le figure geometriche piane (triangoli, quadrilateri, cerchio), utilizzando le precedenti definizioni come base. Particolarmente significativa è l'ultima definizione:

Definizione 23. *Le linee equidistanti, ovvero parallele, sono quelle collocate su una medesima superficie, e che prolungate da entrambe le parti non si intersechino, nemmeno se siano prolungate all'infinito.*

Con quest'ultima definizione Euclide sottintende che proprietà valide localmente siano vere anche all'infinito: questa supposizione è però arbitraria, come vedremo.

1.2.2 Assiomi e postulati

La caratteristica fondamentale degli assiomi è l'*essere considerati veri*. In particolare distinguiamo due tipi di assiomi: un **assioma logico** è una formula valida in ogni modello, ad esempio

$$\forall x(x = x)$$

Questa affermazione è *valida* in ogni sistema formale, a prescindere dai valori che vengono assegnati alla variabile x. x potrebbe essere un numero naturale, un insieme, un segmento, ma sarebbe comunque uguale a x. Di questi assiomi si può verificare la validità ma non si possono dimostrare, infatti essi stessi stabiliscono le regole per le dimostrazioni formali.

Si potrebbe obiettare che, non potendo dimostrare $x = x$, questo assioma si possa anche negare. In realtà non dobbiamo farci condizionare dal nostro linguaggio comune: questo assioma si limita a dirci che l'oggetto x può essere messo in relazione con se stesso mediante l'operatore $=$.

Euclide, pur mancando degli strumenti della logica matematica moderna, enuncia otto proposizioni che svolgono all'incirca la funzione degli assiomi logici, da lui dette **nozioni comuni**:

Nozione comune 1. *Cose uguali a una stessa cosa sono uguali tra loro.*

Nozione comune 2. *Se a cose uguali si aggiungono cose uguali, i resti sono uguali.*

Nozione comune 3. *Se da cose uguali si tolgono cose uguali, i resti sono uguali.*

Nozione comune 4. *Se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le somme sono disuguali.*

Nozione comune 5. *I doppi di una stessa cosa sono uguali tra loro.*

Nozione comune 6. *Le metà di una stessa cosa sono uguali tra loro.*

Nozione comune 7. *Cose che coincidono tra loro sono uguali.*

Nozione comune 8. *Il tutto è maggiore della parte.*

La 1 è l'enunciazione della proprietà transitiva, la quale stabilisce che se $a = c$ e $b = c$, allora necessariamente $a = b$. Le nozioni 2, 3, 4, 5, 6 equivalgono ai principi di equivalenza delle equazioni. La nozione 7 può essere semplicemente interpretata come l'assioma logico $x = x$, ma se trasposto in campo geometrico significa che figure sovrapponibili sono uguali, in poche parole si tratta della definizione di *congruenza*. Per sovrapporre le figure occorre spostarle: questo assioma ci garantisce che spostare le figure nello spazio non altera le loro caratteristiche.

Invece gli **assiomi non-logici** hanno validità limitata a singoli campi, come la teoria degli insiemi o l'algebra. Ad esempio, l'affermazione *esiste un insieme vuoto* è un assioma della teoria degli insiemi e afferma che esiste un insieme che non contiene elementi. Dato che un insieme è un'entità astratta, non possiamo andare a cercare un insieme vuoto per dimostrare che esiste: dobbiamo stabilirlo arbitrariamente. Gli assiomi non-logici quindi contengono verità primitive che sono indispensabili per non cadere in fastidiose contraddizioni nello sviluppo di una teoria formale. Non è importante che queste affermazioni siano vere, perchè sono indimostrabili: è però necessario che le costruzioni successive (teoremi) siano coerenti e dimostrabili con le premesse degli assiomi non-logici e con le regole imposte dagli assiomi logici.

Euclide enuncia cinque di questi assiomi e li chiama **postulati**. Il termine *postulare* significa *richiedere*, ma soprattutto *esigere*. Non è un caso che Niccolò Tartaglia, nella sua traduzione degli Elementi, enunci i postulati introducendoli con *Adimandiamo che ce sia concesso, che...*. I postulati sono effettivamente qualcosa di concesso: non sono *universalmente* necessari, bensì *localmente* necessari allo sviluppo di *una* teoria. Quelli di Euclide, nello specifico, sono indispensabili per costruire la geometria euclidea. Essa, pur essendo coerente, è solo un caso particolare, in quanto dedotta a partire da alcuni assiomi e non da altri.

Ora sappiamo che i cinque postulati sono indipendenti, cioè è impossibile dimostrarne uno utilizzando solo gli altri. Per giungere a questo risultato, come vedremo in seguito, sono stati necessari svariati secoli di dispute matematiche.

Postulato 1. *Da ogni punto a ogni altro punto è possibile condurre una e una sola linea retta.*

Postulato 2. *Un segmento di linea retta può essere indefinitamente prolungato in linea retta.*

Postulato 3. *Attorno ad un centro scelto a piacere è possibile tracciare una circonferenza con raggio scelto a piacere.*

Postulato 4. *Tutti gli angoli retti sono uguali.*

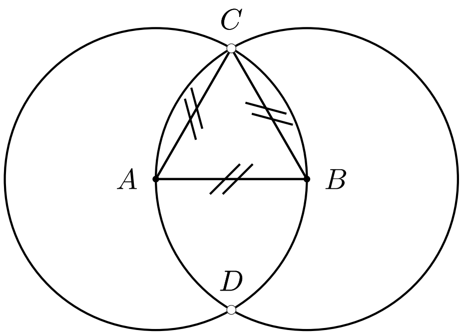
Postulato 5. *Se una retta che taglia due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.*

1.2.3 Teoremi

Dopo aver finalmente posto le basi, Euclide introduce i teoremi, che lui chiama **proposizioni**. Possiamo paragonare la geometria euclidea (così come tutte le teorie matematiche) a una casa: le definizioni costituiscono i materiali da costruzione e gli assiomi rappresentano le fondamenta sulle quali si possono edificare infiniti teoremi. L'edificio, naturalmente, è solido solo se poggia correttamente sulle propria fondamenta: infatti una dimostrazione rigorosa si basa esclusivamente su deduzioni logiche che non contraddicano gli assiomi. Una volta che un teorema è stato dimostrato in modo corretto, può essere usato per dimostrare altri teoremi, così come i mattoni di un edificio poggiano l'uno sull'altro.

Le proposizioni di Euclide sulla geometria piana sono 48: qui di seguito ne vengono elencate alcune per dare un'idea del metodo dimostrativo.

Proposizione 1. *Possiamo sopra una data retta costruire un triangolo equilatero.*



Dimostrazione. Avendo due punti A e B, per il postulato 1 possiamo tracciare una retta che contenga il segmento AB. Per il postulato 3 sappiamo che esiste una circonferenza con centro in A e di raggio $\overline{AB}$. Sempre per il postulato 3, possiamo disegnare un'altra circonferenza con centro B e raggio AB.

Le due circonferenze si intersecano in due punti C e D: tra i due prendiamo il punto C (ma la scelta è arbitraria) e congiungiamolo con A e B. Secondo il postulato 1 esistono quindi due segmenti AC e BC, e anche il segmento AB.

Il punto A appartiene a entrambe le circonferenze, quindi AC e BC sono raggi. Le circonferenze costruite hanno lo stesso raggio, pari ad AB. Tenendo presente la definizione 15 non citata precedentemente (*Il cerchio è una figura piana contenuta da una sola linea, detta circonferenza, in mezzo a essa vi è un centro, tutte le rette condotte dal centro alla circonferenza sono congruenti*), possiamo concludere che $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$.

Citando la definizione 20: *delle figure di tre lati una è detta triangolo equilatero, quello contenuto sotto di tre lati congruenti.* Dunque il triangolo ABC è equilatero.

Quindi, data una retta (quella passante per AB), è sempre possibile costruire un triangolo equilatero sopra di essa. □

Proposizione 2. *Da un dato punto possiamo condurre segmento congruente a qualsiasi segmento dato.*

Proposizione 3. *Dati due segmenti non congruenti, si può togliere al maggiore un segmento congruente al minore.*

A differenza dei postulati, i teoremi non sono indipendenti. Solo le prime proposizioni si possono ricondurre direttamente a definizioni e assiomi: i teoremi più complessi possono basarsi anche sui teoremi precedenti, purchè questi siano stati dimostrati correttamente.

Bisogna tenere presente che i teoremi, posti i necessari assunti, sono conseguenze logiche praticamente *inevitabili.* Una volta provato che discendono da definizioni e postulati, essi non possono più essere messi in dubbio. I postulati, al contrario, possono tranquillamente essere negati, poiché sono dati a priori, senza alcuna dimostrazione. Togliendo o modificando un postulato, però, è probabile che molti teoremi crollino: in questo modo si può creare una nuova teoria fatta di nuovi teoremi, purchè siano coerenti con le nuove premesse.

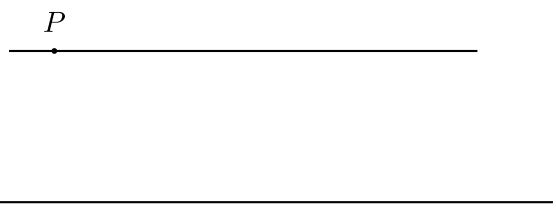
Capitolo 2

Oltre Euclide

"Una geometria non può essere più vera di un'altra; può essere soltanto più comoda."
Jules-Henri Poincaré

2.1 Il dibattito sul quinto postulato

Sin dalla prima stesura degli *Elementi* si è dubitato che il V postulato fosse effettivamente un assioma, forse per la sua forma più complessa e meno immediata degli altri quattro. Euclide stesso deve aver nutrito qualche dubbio sulla legittimità del quinto postulato: infatti lo enuncia per ultimo e dimostra le prime 28 proposizioni degli *Elementi* senza ricorrere ad esso. Queste proposizioni fanno parte della cosiddetta *geometria assoluta* e quindi sono valide anche nelle geometrie non-euclidee. Posidonio e Tolomeo, altrettanto scettici, cercano di dimostrare il quinto postulato a partire dagli altri quattro; in realtà le loro dimostrazioni non sono valide, perchè si basano su costruzioni geometriche che implicitamente accettano il postulato. Un altro coraggioso tentativo viene intrapreso dal filosofo neoplatonico Proclo, che nel 450 scrive: '*Deve essere assolutamente cancellato dai postulati, perchè è un teorema*'. Nel suo commento agli *Elementi* Proclo evidenzia gli errori delle precedenti dimostrazioni, credendo di averne prodotta una corretta. Anche se la sua dimostrazione si è successivamente rivelata errata, a Proclo va il merito di aver formulato l'enunciato di unicità della parallela, logicamente equivalente al quinto postulato ma intuitivamente più comprensibile, tanto da avere rimpiazzato il postulato originale in quasi tutti i trattati di matematica.



Unicità della parallela. *Data una retta e un punto esterno ad essa, esiste una e una sola parallela alla retta data passante per quel punto.*

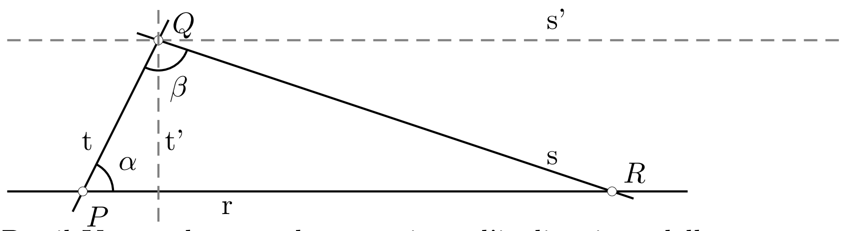
L'equivalenza dell'unicità della parallela con il quinto postulato può sembrare strana, trattandosi di due enunciati che apparentemente non hanno nulla in comune, tuttavia è possibile verificarla dimostrando la doppia implicazione tra i due enunciati:

Teorema 1. *Il V postulato implica l'unicità della parallela.*

Ipotesi.

- t interseca la retta r nel punto P formando con essa l'angolo α.
- t interseca la retta s nel punto Q formando con essa l'angolo β.
- $\alpha + \beta$ è minore di un angolo piatto.
- $r \cap s = R$
- R sta dalla stessa parte di α e β rispetto alla retta t.

Tesi. Esiste ed è unica la retta s' parallela a r.



Dimostrazione. Per il V postulato, anche se variamo l'inclinazione delle rette r e s, si intersecheranno comunque finchè $\alpha + \beta < 180°$[1]. Consideriamo il caso limite in cui $\alpha + \beta = 180°$: poichè α e β stanno dalla stessa parte rispetto a t, sono angoli coniugati interni. Nella proposizione 27 si dimostra che, se due rette tagliate da una trasversale formano coniugati interni supplementari, esse sono parallele: quindi esiste almeno una parallela a r passante per Q. Supponiamo per assurdo che esista un'altra retta, detta u, passante per Q e parallela ad r: dato che rette parallele a una stessa retta sono parallele tra loro (come dimostrato nella proposizione 30), u dovrebbe essere parallela anche a s. Ma, dato che entrambe passano per Q, l'ipotesi si rivela contraddittoria. Dunque esiste al più una parallela a r passante per Q. □

Teorema 2. *L'unicità della parallela implica il V postulato.*

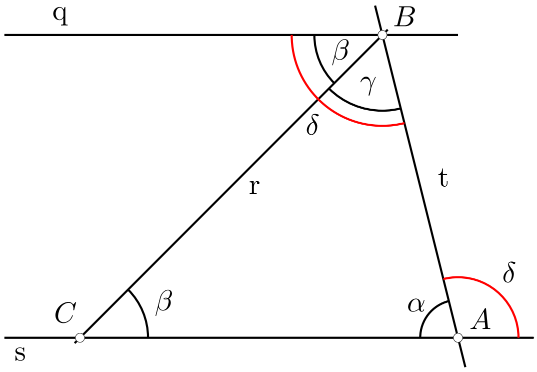
Dimostrazione. Nel caso precedente si è dimostrato che $\alpha + \beta = 180°$ se e solo s arriva ad essere parallela ad r nella posizione s'. Per l'unicità della parallela sappiamo che s' è l'unica parallela ad r passante per Q, quindi s non può essere parallela ad r e di conseguenza la interseca, come previsto dal V postulato. □

Esistono molti altri enunciati equivalenti al V postulato. Tra questi, un esempio particolarmente significativo è *la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a due angoli retti.* La dimostrazione di questa equivalenza, nonostante possa sembrare ridondante, è fondamentale per comprendere quanto siano profonde le conseguenze della negazione di un solo postulato. Infatti, nell'antichità, nessuno avrebbe mai osato supporre che la somma degli angoli interni di un triangolo non fosse pari a un angolo piatto, questo avviene anche ai giorni nostri nella didattica tradizionale della geometria. In realtà i triangoli hanno questa caratteristica se e solo se si accetta il V postulato, che, come abbiamo già visto, è semplicemente una costruzione arbitraria.

[1] Qui è introdotta come unità di misura il grado sessagesimale, definito come la trecentosessantesima parte dell'angolo giro.

Teorema 3. *Se il V postulato è vero, allora la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto.*

Ipotesi. Il V postulato è considerato valido.
Tesi. $S = \alpha + \beta + \gamma$ è uguale a un angolo piatto.



Dimostrazione. Consideriamo le tre rette r, s e t. Costruiamole in modo che non siano parallele tra loro e quindi le loro intersezioni siano vertici del triangolo ABC. Per l'unicità della parallela, che abbiamo dimostrato essere equivalente al V postulato, è sempre possibile tracciare una e una sola parallela a s passante per B, detta q, che forma con t l'angolo δ. Poichè s e q sono parallele si possono individuare i due angoli β e i due angoli δ, alterni interni e quindi congruenti a due a due. L'angolo interno γ è di conseguenza esprimibile come:

$$\gamma = \delta - \beta$$

Sostituendo questa espressione, la somma degli angoli interni di ABC diventa:

$$S = \alpha + \beta + (\delta - \beta)$$
$$S = \alpha + \delta$$

Ma α e δ sono angoli supplementari, quindi la loro somma è un angolo piatto.

□

Teorema 4. *Se la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, allora il V postulato è vero.*

Ipotesi. $S = \alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Tesi. Il V postulato è valido.

Dimostrazione. Se $S = \alpha + \beta + \gamma$ è pari ad un angolo piatto, allora $\alpha + \beta$ è sicuramente minore di un angolo piatto. Infatti, se $\gamma = 0$, il triangolo degenera a un segmento e non ha senso esaminare la situazione. Gli angoli α e β sono individuati dall'intersezione di t con le rette r ed s e stanno dalla stessa parte di C rispetto a t, se così non fosse non sarebbero interni al triangolo. Quindi, il V postulato è vero. □

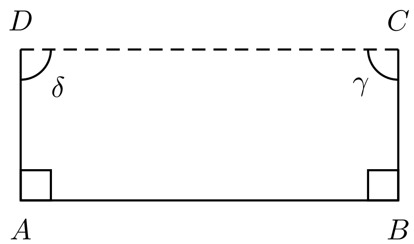
2.2 Girolamo Saccheri

Nel 1733 il matematico gesuita Girolamo Saccheri pubblica l'opera *Euclides ab omni naevo vindicatus*: il titolo significa *Euclide assolto da ogni difetto*; si tratta in effetti di un tentativo di difendere la perfezione formale della geometria euclidea dimostrando il V postulato. Saccheri, visti gli scarsi progressi raggiunti fino ad allora dai tentativi di dimostrazione diretta, utilizza il metodo della dimostrazione per assurdo, strumento peraltro molto amato da Euclide.

La dimostrazione di Saccheri è in linea di principio molto semplice: egli inizia **negando il V postulato** e successivamente opera delle deduzioni sperando di giungere a qualche contraddizione. Se la negazione di un enunciato porta a contraddizioni significa che l'enunciato non può essere falso e, per il principio del terzo escluso, è sicuramente vero. L'obiettivo, in realtà, non è tanto dimostrare la veridicità del V postulato quanto *dimostrarne la dimostrabilità*. Se Saccheri fosse riuscito nel suo intento, il V postulato sarebbe diventato un teorema e, di conseguenza, non si sarebbe mai potuto negare.

Questo tentativo di salvare Euclide, paradossalmente, diventa il primo esempio di geometria non-euclidea. Saccheri, infatti, nega il V postulato per assurdo: quelle che definisce assurde e paradossali conseguenze della negazione del V postulato, infatti, sono in realtà i primi teoremi di geometria ellittica ed iperbolica.

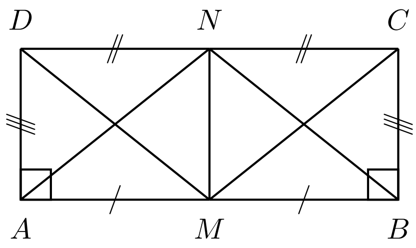
2.2.1 Il quadrilatero di Saccheri



Per la sua dimostrazione Saccheri usa una particolare costruzione sopra raffigurata, il *quadrilatero birettangolo isoscele*. Esso ha quattro lati (quadrilatero), due angoli retti (birettangolo) e i due lati adiacenti agli angoli retti sono congruenti (isoscele). È spontaneo pensare che si tratti di un rettangolo, infatti la figura suggerisce che *tutti* gli angoli siano retti, non solo i due angoli alla base. Se dividiamo il quadrilatero in due triangoli rettangoli (ad esempio ABD e BCD) e ricordiamo che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, possiamo facilmente dedurre che la somma degli angoli del quadrilatero di Saccheri sia $180 * 2 = 360°$, e di conseguenza $\gamma + \delta = 180°$, ma questo, come dimostrato nei teoremi 3 e 4, equivale ad *accettare* il V postulato, mentre Saccheri vuole *dimostrarlo*.

Il quadrilatero birettangolo isoscele ha alcune interessanti proprietà che saranno fondamentali per il lavoro sul V postulato.

Proprietà 1. *La retta congiungente i punti medi dei lati opposti è perpendicolare a entrambi.*



Dimostrazione. Se esaminiamo la retta che congiunge i punti medi di BC e AD, è sufficiente tenere in considerazione che tali segmenti sono per costruzione perpendicolari ad AB e di conseguenza paralleli tra loro, quindi la congiungente i punti medi è senz'altro perpendicolare ad entrambi.

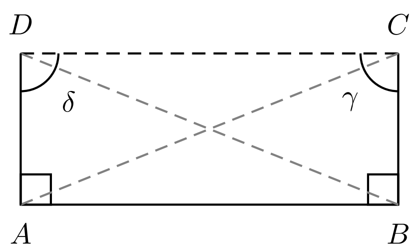
Diverso è il ragionamento che concerne MN. I triangoli AMD e BMC sono congruenti, in quanto:

- $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ per costruzione;
- $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ perché M è il punto medio di AB
- gli angoli in A e in B sono entrambi retti.

Dalla congruenza dei due triangoli deriva che $\overline{MD} \cong \overline{MC}$. Dunque $MDN \cong MNC$, perché MN è in comune e gli altri due lati sono congruenti. Quindi possiamo affermare che gli angoli MND e MNC sono congruenti e anche retti, perché supplementari: allora $\overline{MN} \perp \overline{CD}$.

Allo stesso modo si dimostra che i triangoli AND e BCN sono congruenti, quindi $\overline{AN} \cong \overline{NB}$ e $AMD \cong BCM$ e $\overline{MN}$ forma anche con AB due angoli congruenti e retti. □

Proprietà 2. *Gli angoli non adiacenti alla base sono congruenti.*



Dimostrazione. Si consideri un segmento AB. La proposizione 12 garantisce che è possibile condurre una perpendicolare a una retta passante per un punto interno ad essa: partendo da A e B si traccino dunque due segmenti $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, perpendicolari ad AB e giacenti dalla stessa parte rispetto ad AB.
I triangoli ABD e ABC sono congruenti, in quanto hanno AB in comune, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ per ipotesi e gli angoli in A e in B sono congruenti perché entrambi retti. Quindi $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.
I triangoli ACD e BCD hanno dunque tutti i lati congruenti e, per il terzo criterio di congruenza, sono congruenti. Di conseguenza, $\gamma \cong \delta$. Tuttavia, non si può affermare che sono anche retti senza ricorrere al V postulato. □

Proprietà 3. *Il lato $\overline{CD}$ è maggiore, minore o uguale ad $\overline{AB}$ a seconda che γ e δ siano rispettivamente ottusi, acuti o retti.*

I casi possibili sono dunque tre:

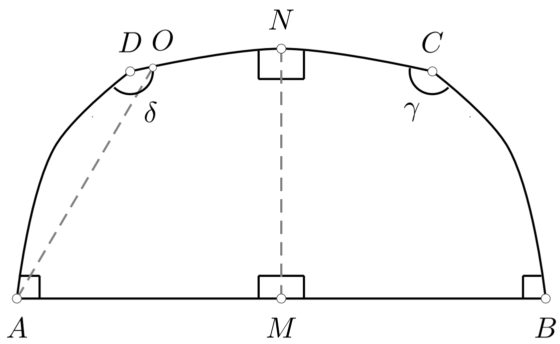
1. Ipotesi dell'angolo retto: $\gamma + \delta$ è uguale a un angolo piatto. È il caso particolare in cui vale il V postulato.

2. Ipotesi dell'angolo ottuso: $\gamma + \delta$ è maggiore di un angolo piatto.

3. Ipotesi dell'angolo acuto: $\gamma + \delta$ è minore di un angolo piatto.

La *reductio ad absurdum* di Saccheri esamina le conseguenze delle ultime due ipotesi: se entrambe portassero a qualche contraddizione l'ipotesi dell'angolo retto sarebbe l'unica possibile, il che equivarrebbe a dimostrare il V postulato.

Ipotesi dell'angolo ottuso



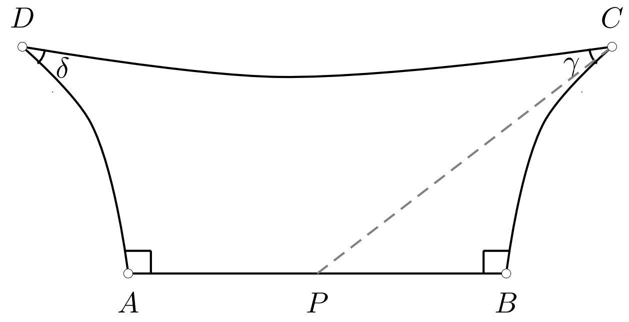
Consideriamo il segmento MN, congiungente i punti medi di AB e CD e congruente ad entrambi per la proprietà 1.

Se DN fosse congruente a AM, il quadrilatero $AMND$ sarebbe un birettangolo isoscele (birettangolo in $\widehat{M}$ e $\widehat{N}$ e isoscele in AM e DN). Ma, se fosse birettangolo isoscele, $M\widehat{A}D$ dovrebbe essere congruente a $N\widehat{D}A$ per la proprietà 2 e questo non è possibile, perché uno è ottuso e l'altro acuto. Dunque $\overline{AM} \neq \overline{DN}$.

Se DN fosse più lungo di AM esisterebbe comunque un ipotetico punto O tale che $\overline{AM} \cong \overline{ON}$, e il quadrilatero $AMNO$ sarebbe birettangolo isoscele di base MN. Ma $M\widehat{A}O$ è minore dell'angolo retto in $\widehat{A}$, quindi acuto, e $A\widehat{O}N$ è il supplementare dell'angolo acuto $A\widehat{O}D$, quindi ottuso. Questo contraddice la 2, dunque $\overline{DN}$ non può essere maggiore di $\overline{AM}$.

Pertanto, avendo escluso le due ipotesi precedenti, si conclude che necessariamente **nell'ipotesi dell'angolo ottuso** $\overline{CD} < \overline{AB}$. Saccheri afferma che l'ipotesi dell'angolo ottuso *è completamente falsa, poichè distrugge se stessa*, ma in realtà è logicamente coerente.

Ipotesi dell'angolo acuto



L'ipotesi dell'angolo acuto occupa la parte conclusiva e più oscura dell'opera di Saccheri.

Supponiamo di tracciare un segmento CP, trasversale a CD e AB, in modo che individui due angoli alterni interni. Secondo la proposizione 27 di Euclide (che non ricorre al V postulato), CD e AB sarebbero equidistanti. Di conseguenza, BC avrebbe una perpendicolare (AB) e una 'obliqua' (CD) equidistanti tra loro. Da questo punto in poi i ragionamenti di Saccheri perdono il loro precedente rigore logico: egli, dopo una serie di passaggi macchinosi, conclude che CD e AB hanno una perpendicolare in comune all'infinito e commenta che il risultato non può essere accettabile, perché *ripugna la natura della retta*.

In realtà Saccheri ha dimostrato per primo l'esistenza di *rette asintotiche*, ovvero rette che si avvicinano sempre di più senza intersecarsi mai. Questo risultato è logicamente coerente con la negazione del V postulato, ma era talmente contrario al senso comune di 'retta' che Saccheri lo liquidò sbrigativamente come assurdo.

2.3 Un nuovo inizio

Non è chiaro se l'opera di Saccheri sia stata accolta con favore o con disprezzo dalla comunità matematica del suo tempo. L'ipotesi più probabile è che sia stata semplicemente ignorata. Dopo di lui ci furono altri tentativi di dimostrazione del V postulato, tra cui ricordiamo quelli di Lambert e Legendre, ma l'unico risultato fu la produzione di altri enunciati equivalenti al postulato. Fino a fine Settecento, inoltre, continuò ad esercitare molta influenza il retaggio kantiano che definiva spazio e tempo come *forme a priori* che non potevano essere oggetto di discussione, in quanto concetti cognitivi universali e necessari. Questa concezione filosofica ha influenzato molto il progresso scientifico, ma, ironicamente, ne è stata anche distrutta: l'avvento delle geometrie non euclidee ha dimostrato che lo spazio non è un concetto assoluto, e nei primi anni del Novecento la teoria della relatività ha negato anche l'assolutezza di tempo e massa.

Dall'inizio dell'Ottocento, il baricentro del problema delle parallele iniziò a spostarsi. Si cominciò a pensare che il V postulato fosse indimostrabile ricorrendo solamente agli altri quattro e che Saccheri avesse fallito proprio per questo. Lagrange e Gauss intuirono che quella euclidea non fosse l'unica geometria possibile, ma entrambi avevano paura di esporre il proprio pensiero, ritenendo che l'opinione comune non fosse ancora pronta per un simile scossone. Gauss, in particolare, temeva il giudizio di un'umanità reduce da secoli di 'indottrinamento euclideo'; preferì dunque non pubblicare la maggior parte dei suoi studi per non correre il rischio di sentire quelle che lui stesso definiva *le strida dei beoti*. Nonostante i propri timori, egli fu il primo a sospettare che lo spazio *reale* non fosse sempre euclideo: capì che i triangoli studiati in geometria sono infinitamente piccoli rispetto alla superficie terrestre e, pertanto, non è detto che abbiano le stesse proprietà. Gauss teorizzò che se si tracciasse sulla superficie terrestre un triangolo immaginario molto esteso, ad esempio usando come lati dei fasci di luce lunghi centinaia di chilometri, la somma dei suoi angoli interni sarebbe molto maggiore di un angolo piatto. In questo modo, oltre a ideare per primo un modello di geometria sferica, egli dimostrò che le geometrie non euclidee non erano una pura speculazione intellettuale, ma potevano essere usate anche per descrivere la realtà fisica.

Una volta insinuata la non-assolutezza del V postulato, erano due le strade che si aprivano ai matematici:

- Negare l'*esistenza* della parallela
- Negare l'*unicità* della parallela

2.4 Problemi di coerenza

Si trattava quindi di introdurre un *nuovo V postulato* accanto ai primi quattro. Da questa operazione apparentemente semplice emerse però il problema della loro coerenza logica: queste teorie erano veramente coerenti? Saccheri aveva cercato di dimostrare l'incoerenza delle geometrie non-euclidee senza riuscirci, ma questo non significava che fossero veramente prive di contraddizioni. La coerenza delle geometrie non euclidee è legata a doppio filo con l'indipendenza del V postulato euclideo. Se esso non fosse indipendente allora sarebbe un teorema, dimostrabile ricorrendo agli altri quattro assiomi. Tuttavia, dato che anche le geometrie non euclidee si basano su quei postulati, l'unicità della parallela sarebbe un teorema della geometria euclidea. Questo contraddirebbe il nuovo quinto assioma non euclideo, e renderebbe la teoria incoerente.

I diversi *modelli* di geometrie non euclidee, oltre ad essere efficaci rappresentazioni qualitative di come possono variare le proprietà degli enti geometrici rispetto al nostro senso comune, sono stati creati anche per individuare empiricamente eventuali incoerenze. Tuttavia, il fatto che i modelli non facessero emergere incoerenze non garantiva di per sè la coerenza delle teorie.

Klein nel 1871 riuscì a dimostrare che, se la geometria euclidea è coerente, lo è anche quella non euclidea. Questo risultato fu insoddisfacente per molti matematici, perché esprimeva una coerenza relativa e non assoluta, inoltre non risolveva il problema della coerenza euclidea. Per eliminare questo problema una volta per tutte, David Hilbert pubblicò i suoi *Grundlagen der Geometrie*, ossia un'opera che si proponeva di riedificare la geometria in modo che fosse logicamente inespugnabile e al riparo da contraddizioni. La geometria euclidea che si studia oggi è in buona misura basata sugli assiomi di Hilbert. Tuttavia, il sogno di Hilbert fu infranto sessant'anni più tardi, quando Kurt Gödel dimostrò i due **teoremi di incompletezza**:

Primo teorema di incompletezza. *In ogni teoria matematica T sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica, esiste una formula φ tale che, se T è coerente, allora né φ né la sua negazione $\neg\varphi$ sono dimostrabili in T.*

Secondo teorema di incompletezza. *Nessuna teoria matematica sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica può provare la propria coerenza.*

Capitolo 3

Geometria iperbolica

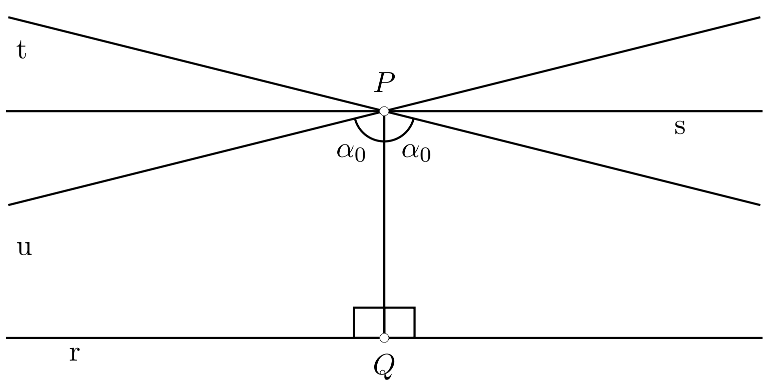
"Per amor del cielo, ti imploro di desistere dal tentativo. Il problema delle parallele è una cosa da temere ed evitare non meno delle passioni dei sensi, poiché anch'esso può rubarti tutto il tuo tempo e privarti della salute, della serenità di spirito e della felicità."
Farkas Bólyai al figlio János

3.1 Basi concettuali

Questa geometria è il naturale proseguimento dell'ipotesi dell'angolo acuto di Saccheri. Al contrario di lui, Gauss non la etichettò come 'assurda', e assieme a Lobacevskij e Bolyai la sviluppò come una geometria 'vera'. Nella geometria iperbolica la parallela a una retta data passante per un punto esiste ancora, ma non è più unica. *Iperbole* in greco significa letteralmente *esubero*: vi è effettivamente un 'eccesso' di parallele rispetto alla geometria euclidea.

Postulato iperbolico. *Data una retta r e un punto P esterno ad essa, per P passano almeno due rette distinte che non intersecano r.*

3.2 Tipi di rette



Innanzitutto bisogna premettere che questo è solo un tentativo di mostrare visivamente la situazione. In realtà esistono molti altri modi di raffigurare lo spazio geometrico, coerentemente con il postulato iperbolico: si parla quindi di **modelli di geometria iperbolica**.

Se esistono almeno due rette, dette u e t, non secanti r, allora ne esistono infinite (almeno tutte quelle comprese tra u e t, che sono infinite). Le infinite rette che non intersecano r possono essere divise in due classi:

- Le rette **parallele** ad r per P sono esattamente due, e separano le non secanti dalle secanti: nella figura, sono u e t.
- Le rette **iperparallele** ad r per P sono le infinite non secanti comprese tra u e t. L'angolo compreso tra l'iperparallela e la parallela è detto angolo di parallelismo.

Questa situazione può sembrare molto strana: apparentemente, basta prolungare la retta t per farla intersecare con r. Non bisogna però farsi fuorviare dai preconcetti, perché nello spazio iperbolico le rette non si comportano come nello spazio euclideo. Poniamo che la retta t inizialmente coincida con la perpendicolare PQ: in tal caso è sicuramente secante con r. Via via che t si inclina, il punto di intersezione Q si sposta verso destra, e t forma con PQ un angolo α sempre più ampio. Quando α diventa un angolo retto, t coincide con s e smette di intersecare r. Poi, se α continua a crescere e diventa ottuso, inzia ad intersecare r dall'altra parte.

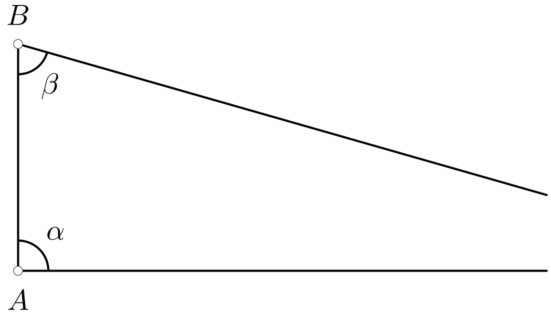
Il V postulato afferma che r e t non sono secanti se e solo se α è retto.

Gauss, Bolyai e Lobacevskij, invece, ipotizzarono che esistesse un angolo α_0 che *tende* all'angolo retto ma, pur rimanendo acuto, fa sì che t non intersechi r nè a destra nè a sinistra.

È importante tenere presente il verso di parallelismo di due rette, perché il loro comportamento non è simmetrico. t è parallela ad r *verso destra*: le due rette divergono infinitamente verso sinistra e convergono asintoticamente nel verso del parallelismo. Fu proprio la scoperta di questa proprietà a convincere Saccheri dell'assurdità dell'ipotesi dell'angolo acuto, non riuscendo a concepire che una retta potesse tendere a un'altra senza intersecarla mai, nemmeno all'infinito.

Si noti che, se la distanza PQ è piccola, l'angolo di parallelismo α_0 tende sempre più all'angolo retto. Quindi, per piccole distanze lo spazio iperbolico è molto simile a quello euclideo. Così come a livello subatomico valgono leggi fisiche diverse da quelle classiche, allo stesso modo la geometria delle grandi distanze è diversa da quella che ci appare nelle piccole.

3.3 Triangoli iperbolici



Il biangolo, o **triangolo iperbolico**, è costituito da un segmento AB, detto *lato finito*, e da due semirette uscenti da A e B, parallele tra loro, che formano con AB due angoli α e β. Il biangolo ha alcune proprietà interessanti:

Teorema 1. *Nel biangolo, un angolo esterno è maggiore dell'angolo interno e opposto.*

Se ne deduce che il teorema di Talete non vale nella geometria iperbolica.

Teorema 2. *Se due biangoli hanno congruenti il lato finito e uno dei due angoli, allora hanno congruente anche l'altro angolo.*

Teorema 3. *Se due biangoli hanno congruenti gli angoli, allora hanno congruente anche il lato finito.*

Questo teorema implica che i triangoli simili non esistano nella geometria iperbolica: infatti, se hanno tutti gli angoli congruenti, sono congruenti.

Teorema 4. *La somma degli angoli interni di un triangolo iperbolico è sempre minore di due angoli retti.*

Il **difetto angolare** del triangolo iperbolico è definito come la differenza $180° - \alpha - \beta$. L'area del triangolo iperbolico è sempre un multiplo del difetto angolare D:

$$A = kD$$

Dato che il difetto angolare può essere al più 180°, se ne deduce che *l'area di un triangolo ha un limite superiore*, mentre nella geometria euclidea può crescere a piacere. Generalizzando il risultato a un poligono di n lati:

$$A < nk180°$$

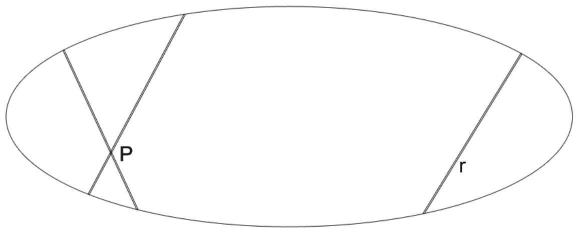
Si noti che il difetto angolare tende a zero quando i lati del triangolo sono molto piccoli. A livello locale, *la geometria iperbolica è quindi approssimabile a quella euclidea*: questo ci dimostra che le geometrie non-euclidee non sono solo modelli teorici, ma sono anche concretamente plausibili. Lo spazio reale potrebbe essere iperbolico e noi potremmo non accorgercene affatto, perché abituati a trattare oggetti geometrici infinitamente piccoli rispetto all'universo, per i quali sono validi i teoremi euclidei.

La portata di questa scoperta è paragonabile all'impatto avuto dalla teoria della relatività einsteiniana: sebbene Einstein abbia di fatto smentito numerose verità della fisica classica, essa continua ad essere efficace per descrivere i fenomeni quotidiani.

3.4 Modello di Klein

Felix Klein ha creato un modello molto intuitivo di geometria iperbolica che intepreta gli enti primitivi in maniera coerente con le definizioni euclidee, sebbene in modo diverso dal senso comune.

- Il **piano** di Klein è l'insieme dei punti interni a una conica irriducibile detta K. I punti di K limitano il piano, ma non vi appartengono.
- Una **retta** è una qualsiasi corda del piano, estremi inclusi.



Come previsto dal postulato iperbolico, per P passano due parallele a r ed è possibile tracciare infinite altre corde che non intersecano r. Le rette che intersecano r sul perimetro di K (che non appartiene al piano) sono le due parallele, tutte le altre rette non secanti sono le iperparallele.

Nonostante la definizione di segmento sia analoga a quella euclidea, nel modello di Klein la lunghezza di un segmento si calcola in modo differente. Dati due punti A e B interni a K e chiamate P e Q le intersezioni di AB con la conica irriducibile K che limita il piano, la lunghezza $\overline{AB}$ è definita in questo modo:

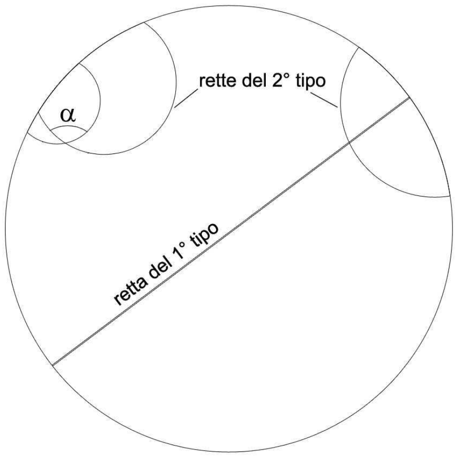
$$\overline{AB} = \left| \ln \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{AQ} \cdot \overline{BP}} \right|$$

Quando A e B tendono 'al confine dello spazio', cioè a coincidere con P e Q, si verifica facilmente che $\overline{AB} \to +\infty$. Questa definizione di lunghezza soddisfa anche i requisiti normali che una lunghezza deve avere, cioè è sempre positiva ed è additiva, ovvero se un segmento è l'unione di due segmenti la sua lunghezza è la somma delle due lunghezze.

I difetti di questo modello emergono quando si deve affrontare il problema degli angoli: intersecando tre rette non parallele, infatti, otterremo un triangolo euclideo con la somma degli angoli interni pari a un angolo piatto, il che contraddirebbe il postulato iperbolico. Per ottenere una misura degli angoli coerente con la geometria iperbolica è quindi necessario adottare un sistema di misura degli angoli non rappresentabile graficamente, che coinvolge tangenti complesse e dimostra gli evidenti limiti del modello di Klein e rende preferibile il modello di Poincarè.

3.5 Modello di Poincarè

- Il **piano** di Poincarè è l'insieme dei punti interni ad una circonferenza detta C.
- Una **retta del I tipo** è un diametro di C.
- Una **retta del II tipo** è un arco di circonferenza interno a C, avente gli estremi su C.
- Un **segmento** è l'insieme dei punti di una retta compreso tra due punti.
- L'**angolo** tra due rette che si intersecano in un punto P è da interpretare in senso euclideo come l'angolo compreso tra le rette euclidee tangenti agli archi di circonferenza in P.



La lunghezza di un segmento si calcola analogamente al modello di Klein. Dati due punti A e B interni al cerchio e chiamate P e Q le intersezioni di AB con la circonferenza, la lunghezza $\overline{AB}$ è definita in questo modo:

$$\overline{AB} = \left| \ln \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BQ}}{\overline{AQ} \cdot \overline{BP}} \right|$$

Capitolo 4

Geometria ellittica e sferica

4.1 Basi concettuali

Assioma di Riemann. *Due rette qualsiasi di un piano hanno sempre almeno un punto in comune.*

Nella geometria iperbolica si nega l'unicità della parallela, cioè non ne esiste *una sola*; per negare il V postulato euclideo si può anche negare l'esistenza della parallela, cioè postulare che non ne esista nemmeno *una*.

Grazie a questo nuovo assioma Bernhard Riemann ha sviluppato le geometrie che derivano dall'ipotesi dell'angolo ottuso di Saccheri, quella sferica e quella ellittica.

4.2 Coerenza

L'assioma di Riemann è in evidente contraddizione con la proposizione 31 degli *Elementi*:

Proposizione 31. *Data una retta e un punto esterno ad essa, per quel punto passa almeno una parallela alla retta data.*

Questo teorema fa parte della geometria assoluta, cioè è dimostrabile senza ricorrere al V postulato, quindi è necessario modificare almeno uno degli assiomi che servono per dimostrarlo.

Nonostante la geometria ellittica e sferica siano nate successivamente alla pubblicazione dei *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert, oggi si preferisce definirle modificando direttamente gli assiomi di Hilbert anzichè scomodare gli ormai obsoleti *Elementi.* Il sistema formale di Hilbert non è diverso nella sostanza da quello di Euclide, ma è molto più rigoroso e assiomatizza tutti i concetti che erano stati sottintesi da Euclide.

Gli assiomi che rendono dimostrabile la proposizione 31 sono due:

- L'assioma di **ordinamento** è modificato solo nella geometria sferica.
- L'assioma di **incidenza** è modificato sia nella geometria sferica che in quella ellittica.

Assioma di ordinamento. *In ogni retta r si possono stabilire due ordinamenti totali, l'uno opposto all'altro:*

- *Tra due punti distinti qualunque A e B appartenenti a r vi è sempre un punto $C \in r$ che sta tra A e B.*

- *Preso un qualunque punto $C \in r$, esistono due punti A e B appartenenti a r tali che C sta tra A e B.*

Assioma di incidenza. 1. *Il piano è un insieme infinito, gli elementi che lo costituiscono sono detti punti, le rette sono sottoinsiemi propri e infiniti del piano.*

2. *Ogni punto appartiene a infinite rette.*

3. *Ogni coppia di punti distinti nel piano appartiene a una sola retta.*

4.3 La geometria sferica

Negando l'assioma di ordinamento, che permette di formalizzare matematicamente il significato della preposizione *tra*, viene a cadere la tradizionale idea di 'successione' di punti su una retta. Le rette della geometria sferica sono quindi interpretabili come *linee chiuse*, sulle quali non si può dire se un punto venga prima di un altro.

Nonostante questa proprietà sia apparentemente strana, la geometria sferica è qualitativamente intuitiva, perché descrive la realtà di una superficie sferica come la Terra. Benchè la Terra non sia una sfera perfetta (è infatti un pò schiacciata ai due poli), la geometria sferica è comunque efficace per descrivere ciò che accade a livello macroscopico: localmente, infatti, lo spazio sferico è assimilabile a quello euclideo con ottima approssimazione. Se disegnamo un triangolo per terra è come se lo disegnassimo su un pallone; tuttavia si tratta di un triangolo infinitamente piccolo rispetto alla superficie totale della Terra, quindi *quasi* piano. La differenza non è certamente riscontrabile con i nostri strumenti, ma è importante sottolinearla per capire che lo spazio euclideo, lungi dall'essere l'unico possibile, è solamente un *caso limite*.

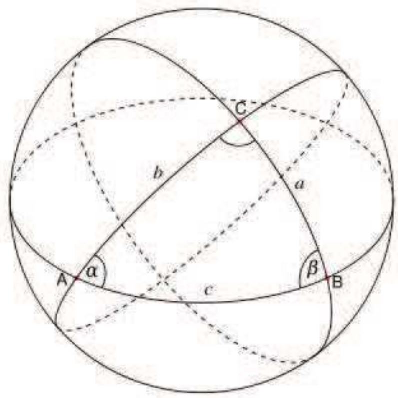


Figura 4.1: Modello di Riemann

Il modello di Riemann descrive gli enti della geometria sferica in base alle loro relazioni con una superficie sferica dello spazio euclideo, detta S:

- Il **piano** è l'insieme dei punti appartenenti ad S.

- Ogni punto ha un **antipodale**, ossia il punto diametralmente opposto.

- Le **rette** sono tutte e sole le circonferenze massime di S, dette anche dette **geodetiche**, che si ottengono intersecando S con un qualsiasi piano passante per il centro della sfera.
- Un **segmento** di estremi A e B è il più breve arco di circonferenza massima che collega A a B.
- Un **angolo** è la parte di piano compresa tra due geodetiche.

Le definizioni degli enti evidenziano subito alcune incongruenze. Innanzitutto le circonferenze di una sfera, seppure massime, non hanno lunghezza infinita. Inoltre, per due punti antipodali passano infinite rette (basti pensare ai due poli terrestri, per i quali passano infiniti meridiani). Queste incongruenze sono risolte modificando opportunamente l'assioma di incidenza.

4.3.1 Teoremi di geometria sferica

Teorema 1. *Tutte le rette sono congruenti e hanno lunghezza pari a* $l = 2\pi R$.

Teorema 2. *Tutte le rette hanno due e due soli punti in comune.*

Teorema 3. *La somma degli angoli interni di un triangolo sferico è sempre maggiore di un angolo piatto.*

Teorema 4. *L'area di un triangolo sferico è data dalla relazione*

$$A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

con la misura degli angoli espressa in radianti.[1]

Teorema 5. *La dipendenza tra angoli e lati di un triangolo sferico è data dalla relazione:*

$$cos\frac{a}{R} = cos\frac{b}{R}cos\frac{c}{R} + sen\frac{b}{R}sen\frac{c}{R}cos\alpha$$

dove a,b e c sono i lati del triangolo, R è il raggio della sfera e α è l'angolo opposto ad a.

Teorema 6. *In un triangolo rettangolo di ipotenusa c e cateti a e b vale la seguente relazione:*

$$cos\frac{c}{R} = cos\frac{a}{R}cos\frac{b}{R}$$

Questo teorema è l'equivalente del teorema di Pitagora nella geometria sferica, dove però si deduce che $a^2 + b^2 > c$.

Utilizzando i polinomi di Taylor si può dimostrare che il teorema di Pitagora 'tradizionale' è un'approssimazione di questo teorema per $r \to \infty$: lo spazio piano è idealmente lo spazio di una sfera con raggio infinito.

[1] Il radiante è definito come l'angolo al centro che sottende un arco di circonferenza uguale al raggio.

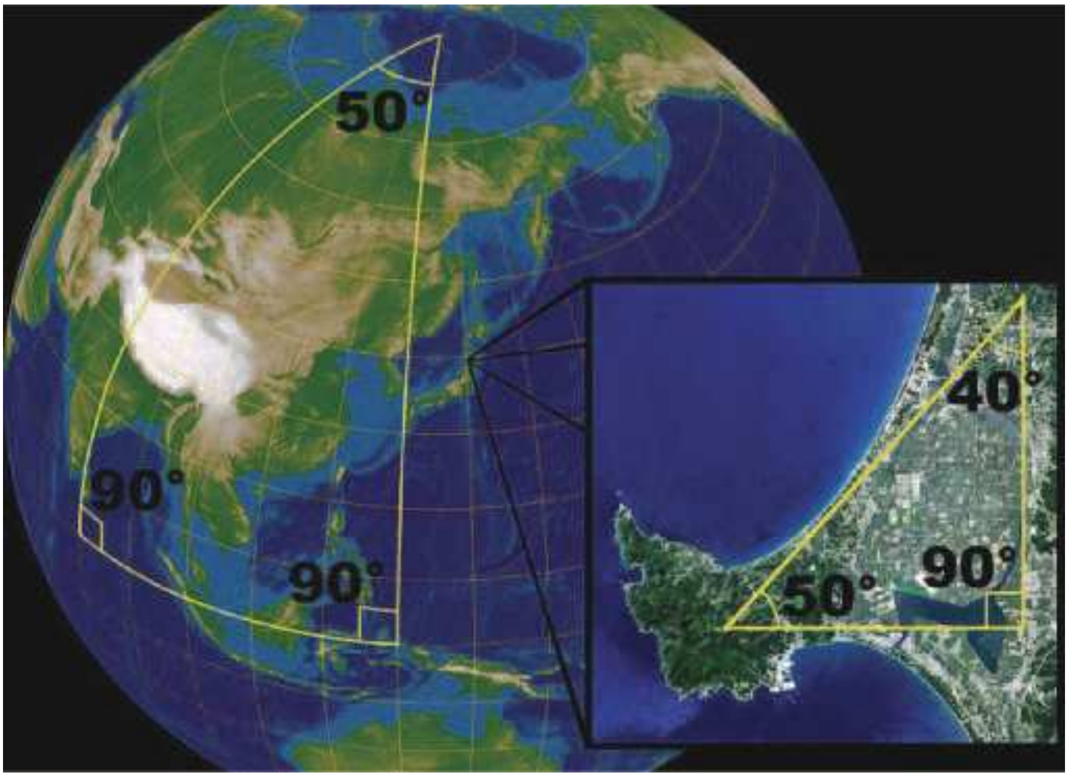


Figura 4.2: Rappresentazione globale e locale della geometria sferica

4.4 La geometria ellittica

Rappresentare la geometria ellittica è una sfida più complessa. Uno dei modelli più comuni è la **stella**.

- Il **piano**, o stella di centro O, è l'insieme di tutti i punti e le rette passanti per O.
- Un **punto** ellittico è rappresentato da una retta euclidea passante per O.
- Una **retta** ellittica è rappresentata da un piano euclideo passante per O.
- Un **segmento** di estremi A e B è l'angolo euclideo tra le rette euclidee che rappresentano i punti ellittici A e B.
- L'**angolo** compreso tra due rette è l'angolo diedro euclideo compreso tra i due piani euclidei che rappresentano due rette ellittiche.
- La **circonferenza** è il luogo dei punti equidistanti da un punto detto centro. Applicando la definizione di punto ellittico, la circonferenza nella geometria ellittica è analoga ad un cilindro nello spazio euclideo.

La difficoltà di rappresentazione di questo modello può essere aggirata considerando l'intersezione della stella di centro O con una sfera di centro O. In questo modo gli enti della stella vengono reinterpretati come le loro intersezioni con la sfera, in modo simile alla geometria sferica. Questo metodo può anche essere applicato intersecando la stella con una semisfera, anziché una sfera.

Capitolo 5

Spazi curvi

5.1 Qual'è la geometria dello spazio fisico?

Posto che la geometria possibile non è una sola, come possiamo sapere quale sia la geometria che descrive più correttamente la realtà? Lo spazio in cui ci muoviamo è euclideo, iperbolico o ellittico? La risposta, già intuita da Gauss e chiaramente espressa da Riemann, affida la decisione all'esperienza. Scopriamo quindi che la geometria, oltre ad essere una scienza ad alto livello di astrazione concettuale, ha anche un carattere empirico.

Le misure compiute a livello astronomico hanno stabilito che lo spazio ha curvatura nulla e quindi che la geometria dell'astronomia è quella di Euclide. Queste misurazioni, però, non possono farci conoscere nulla sulla curvatura dello spazio a livello microscopico. Per decidere la natura dello spazio in cui ci troviamo dovremmo verificare la validità del V postulato. Tuttavia, questo può risultare empiricamente impossibile. Il limite della nostra esperienza è il non poter manipolare l'infinito geometrico: possiamo disegnare una retta r e un punto P e verificare che per P passano molte secanti a R, ma se proviamo a disegnare una parallela ad R in realtà possiamo raffigurarne soltanto un piccolo tratto e non possiamo essere certi che quella retta, se infinitamente prolungata, non intersecherà r a mille anni luce di distanza.

Alternativamente, si potrebbe controllare l'ampiezza degli angoli interni di un triangolo: tuttavia si è visto che il difetto e l'eccesso angolare non sono percepibili sui triangoli della nostra esperienza quotidiana, e comunque un'eventuale esperimento in tal senso sarebbe soggetto a notevoli errori di misura.

Ne risulta che *non possiamo stabilire la geometria dello spazio in cui ci troviamo da dentro lo spazio stesso*, allo stesso modo in cui nel romanzo di Edwin A. Abbot *Flatlandia* gli abitanti di un mondo bidimensionale non possono percepire la terza dimensione.

5.2 Relatività e geometrie non euclidee

"Abbandonare la geometria e conservare la fisica è come descrivere i pensieri senza parole."
Albert Einstein

In ogni legge fisica ci sono fattori esterni che tendono a fuorviare i risultati, ad esempio la temperatura, la pressione o l'umidità. Per ovviare a questo problema vengono introdotti dei parametri correttivi, spesso di natura empirica. Nel 1915 Einstein ha scoperto che anche la presenza di un campo gravitazionale è uno di questi fattori 'fuorvianti'. La teoria della relatività generale infatti prevede che i sistemi non inerziali, cioè i sistemi accelerati, siano *curvi* e i corpi in movimento in sistemi non inerziali percorrano perciò traiettorie non rettilinee.

L'esempio più conosciuto è la **deflessione** dei raggi luminosi: in presenza di un campo gravitazionale, infatti, i raggi ci appaiono 'deviati'. Un fenomeno di questo tipo può essere trattato come un''anomalia' che necessita di un fattore correttivo nelle leggi dell'ottica, oppure si può rivedere la concezione di spazio in modo che l'anomalia non sia più tale. Einstein non ha scoperto che la geometria dello spazio è non euclidea, ma ha semplicemente proposto una teoria fisica che ha come presupposto una geometria non euclidea perché complessivamente le leggi fisiche risultano più semplici.

La geometria adottata da Einstein è di tipo riemanniano. Essa varia da luogo a luogo in funzione della concentrazione delle masse, la cui influenza si esercita nella data zona di spazio.

In tal modo non occorre più introdurre fattori correttivi per giustificare la traiettoria non rettilinea della luce. I raggi di luce, come tutti i corpi, percorrono le *geodetiche*, che soltanto in particolari condizioni coincidono con le rette che siamo abituati a osservare. Si abbandonano infatti i concetti di forza e di campo di forze (che coinvolgevano vecchi e complicati problemi riguardanti l'azione a distanza e la natura dei campi) in favore di una descrizione fisica più semplice. Ad esempio, non si dice più che la Terra ruota intorno al Sole perché quest'ultimo esercita una forza su di essa, ma che la Terra percorre la geodetica dello spazio-tempo nella geometria determinata dalla massa del Sole. Analogamente, non si dice più che i campi gravitazionali incurvano i raggi di luce, ma che questi ultimi percorrono le geodetiche dello spazio-tempo. In definitiva, la scelta di quale geometria valga nello spazio fisico non è una questione geometrica, ma neppure una questione puramente fisica. È infatti possibile constatare come nella scelta dell'una o dell'altra entrino necessariamente in gioco in misura determinante anche alcune concezioni a priori di natura filosofica sullo spazio e sul tempo, nessuna delle quali è eliminabile o privilegiabile sulla base di semplici considerazioni empiriche.

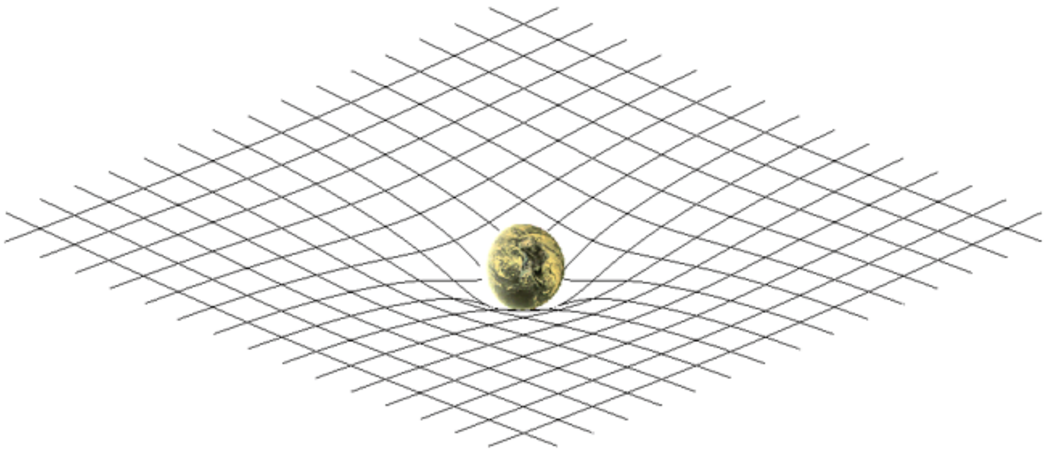


Figura 5.1: Curvatura dello spazio causata da una concentrazione di massa

Bibliografia

[1] Wikipedia, l'enciclopedia libera. `http://it.wikipedia.org`.

[2] Edwin A. Abbott. *Flatlandia.* Adelphi, undicesima edizione, 2004.

[3] Massimo Bergamini, Anna Trifone, Davide Neri, e Rosanna Tazzioli. *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della matematica.* Zanichelli, prima edizione, 2003.

[4] Nikolaj Lobacevskij. *Nuovi principi della geometria.* Bollati Boringhieri, seconda edizione, 2003.

[5] Dario Palladino. *Le geometrie non euclidee fra cultura, storia e didattica della matematica.* Università di Pisa, 2004.

[6] Paul Hoffman. *L'uomo che amava solo i numeri.* Mondadori, prima edizione, 2000.

[7] Bertrand Russell. *Introduzione alla filosofia matematica*, pp. 160–193. Newton Compton, quinta edizione, 1997.