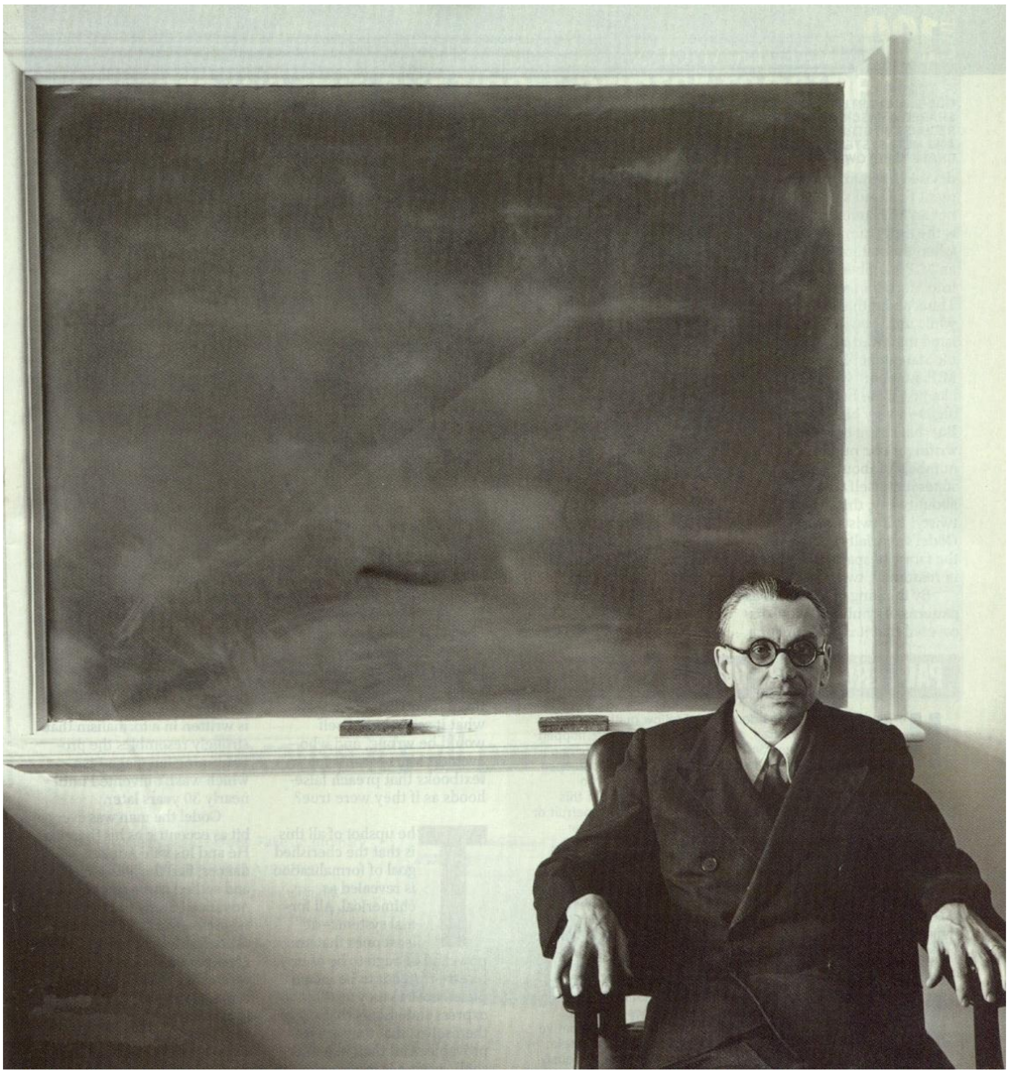


Liceo Tito Lucrezio Caro
Classe 5a A
Anno scolastico 2007/2008

LA MATEMATICA SUBLIME

INCOMPLETEZZA

Pierpaolo Toniato

LA MATEMATICA SUBLIME

INCOMPLETEZZA

Che abbia ragion d'essere una sola interpretazione del mondo, quella in cui voi vi sentite a posto, quella in cui si può investigare e lavorare scientificamente, è una balordaggine ed un'ingenuità, posto che non sia un'infermità dello spirito, un'idiozia. Un'interpretazione "scientifica" del mondo potrebbe essere pur sempre una delle più sciocche, cioè, tra tutte le possibili interpretazioni del mondo, una delle più povere di senso. ***Nietzsche, La gaia scienza***

MAPPA CONCETTUALE

LA SCOPERTA DELLE GEOMETRIE NON-EUCLIDEE

LA RIVOLUZIONE DELLA LOGICA: GEORGE BOOLE

LA CRISI DEI FONDAMENTI IN MATEMATICA

LOGICISMO
FREGE, RUSSEL

FORMALISMO
HILBERT

INTUIZIONISMO
BROUWER

KÜRT GÖDEL

VITA ED OPERE

RIFLESSIONI FILOSOFICHE

I TEOREMI DI INCOMPLETEZZA:
SIGNIFICATO E DIMOSTRAZIONE

INTRODUZIONE

Lo sviluppo della matematica a cavallo del 1900 fu di proporzioni assolute: mai vi erano state in precedenza scoperte e rivoluzioni di una tale portata. Dalla scoperta delle geometrie non-euclidee all'invenzione della logica formale, emerge con forza la figura di Kurt Gödel, forse il più grande logico del Novecento, che con i suoi teoremi d'incompletezza distrugge ogni speranza di tutte le scuole filosofico - matematiche sul dibattito rispetto ai fondamenti della matematica.

Si delineeranno in quest'articolo la situazione e il dibattito in cui Gödel verrà ad inserirsi e successivamente gli aspetti fondamentali dei Teoremi d'Incompletezza, da un punto di vista sia matematico, sia filosofico.

Un argomento sicuramente complesso per una tesina di maturità, ciò nonostante scelto per l'interesse suscitato e per le profonde riflessioni che ha destato.

Il titolo può sembrare assolutamente slegato dall'argomento della tesina: in realtà si rifà direttamente al concetto di sublime matematico di Kant:

> […]CIÒ CHE È ASSOLUTAMENTE GRANDE AL DI LÀ DI OGNI CONFRONTO,[…]UNA GRANDEZZA UGUALE SOLO A SE STESSA[…]

> PER IL FATTO CHE NELLA NOSTRA IMMAGINAZIONE C'È UN'ASPIRAZIONE A PROGREDIRE ALL'INFINITO,E NELLA NOSTRA RAGIONE, INVECE,UNA PRETESA ALLA TOTALITÀ ASSOLUTA QUALE IDEA REALE, ECCO CHE QUELLA STESSA INADEGUATEZZA, RISPETTO A TALE IDEA,DELLA NOSTRA FACOLTÀ CHE STIMA LE COSE DEL MONDO SENSIBILE VALE A RISVEGLIARE IL SENTIMENTO DI UNA FACOLTÀ SOPRASENSIBILE A NOI[…]

La ragione quindi,attraverso i Teoremi d'incompletezza, trova di fronte a se, nelle intrinseche strutture della matematica , l'impossibilità di afferrare compiutamente la matematica stessa: quest'impossibilità genere quel sentimento, di sublime matematico. La pretesa di totalità assoluta,è semplicemente, irraggiungibile:ecco perché matematica sublime.

LA CRISI DEI FONDAMENTI

Con "crisi dei fondamenti della matematica" (questa è l'espressione che utilizzano quasi tutti gli storici) si vuole indicare l'ampio dibattito che ha coinvolto l'intera comunità dei matematici, e dei filosofi, nel primo trentennio del XX secolo, incentrato sulla natura della matematica, cioè su quali siano, se ci sono, gli enti primitivi indimostrabili che costituiscono il punto di partenza di questa disciplina. In sintesi, ci si chiedeva quale fosse la risposta giusta alla domanda cos'è la matematica. Tale dibattito fu di dimensioni così vaste che portò in pratica tutti gli uomini di scienza a pronunciarsi in proposito. Le posizioni filosofiche più innovatrici diedero vita a vere e proprie scuole matematiche, come l'Intuizionismo, il Formalismo e il Logicismo. Dalle nuove impostazioni epistemologiche derivò addirittura la nascita di nuove discipline, come la "teoria della dimostrazione" o "metamatematica", e il consolidamento di quelle emergenti, come la logica matematica.

Nonostante le questioni fondazionali abbiano monopolizzato l'interesse della comunità scientifica per diversi decenni, si deve costatare che non si è mai giunti a conclusioni soddisfacenti, cioè universalmente accettate. Almeno da una cinquantina d'anni i matematici hanno quasi del tutto rinunciato a portare avanti il dibattito, o per lo meno lo considerano d'interesse esclusivamente filosofico. La matematica contemporanea è sempre più prolifica di risultati tecnici, anche grazie alla recente commistione con l'informatica e al rapidissimo sviluppo del calcolo delle probabilità e della statistica, e pare ormai allontanarsi quasi del tutto dalle investigazioni epistemologiche, così che la crisi dei fondamenti può considerarsi chiusa nella pratica.

Nei prossimi paragrafi cercheremo di fare un resoconto chiaro della crisi, analizzando le possibili cause, le diverse scuole di pensiero, le opere più importanti. Tutto ciò in modo abbastanza sintetico, quindi senza alcuna pretesa di completezza.

Fondamentali per capire quali sono le radici storiche della crisi, sono i profondi cambiamenti che la matematica ha subito nell'arco del XIX secolo. Questi cambiamenti possono essere raggruppati sotto sette eventi:

- La scoperta delle geometrie non euclidee;
- La nascita della logica matematica;
- La nascita dell'analisi moderna;
- La nascita della teoria degli insiemi;
- L'aritmetizzazione dell'analisi;
- La logicizzazione dell'aritmetica;
- La formalizzazione della geometria;

Di seguito saranno trattati brevemente i primi due punti, gli unici veramente necessari ai fini di questo lavoro. La descrizione degli altri sviluppi, di fatto, è più adatta ad un'opera di storia della matematica, che esula dai nostri obiettivi.

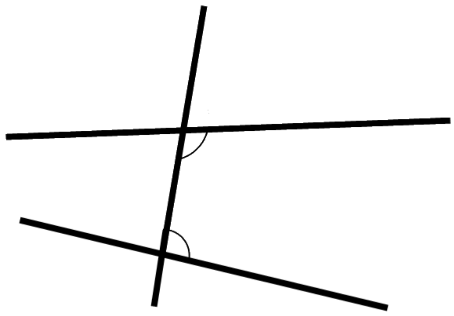
Le geometrie non-euclidee

Negli *Elementi* di Euclide, che per circa due millenni è stato il testo più autorevole, la geometria è sviluppata come un sistema assiomatico non formale. Gli enti primitivi sono quelli dettati dall'intuizione dello spazio ideale: punto, retta, piano. Sono dati cinque postulati[1] di cui il quinto, noto come *postulato delle parallele*, recita:

Se una retta, incontrandone altre due, forma gli angoli interni da una stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate all'infinito s'incontrano dalla parte in cui sono i due angoli minori di due retti.

Si può dimostrare che il quinto postulato è equivalente alla seguente proposizione: dati, in un piano, una retta e un punto esterno ad essa, esiste una e una sola retta, in quel piano, parallela a quella retta e passante per quel punto.

[1] I "postulati" d'Euclide corrispondono a quelli che oggi chiamiamo "assiomi".



Per motivi non ben identificati, si era sviluppato sin dall'antichità il presentimento che questo postulato fosse sovrabbondante (cioè che fosse dimostrabile a partire dagli altri quattro, perciò non necessario per la deduzione completa della geometria, dunque eliminabile) o, in ogni modo, poco evidente, nella forma in cui era stato dato da Euclide. Vi furono dunque, fin dall'antichità, vari tentativi di dimostrazione o "correzione".

Indipendentemente l'uno dall'altro Nicolaj Ivanovič Lobacevskij (1793-1856) nel 1829 in *O načlach geometrii (Sui principi della geometria)* e János Bólyai (1802-1860) nel 1832 in *Scienza assoluta dello spazio*, apparsa in appendice all'opera *Tentamen*[2] di suo padre Farkas Bólyai (amico di Gauss), ebbero l'idea di sviluppare una nuova geometria in cui non fosse valido il quinto postulato. Essi sostituirono il quinto postulato con l'assunzione che per un punto esterno ad una retta data si potessero tracciare più rette parallele ad essa.
Lobacevskij e Bólyai diedero vita ad una geometria, oggi detta "geometria iperbolica", la quale pur andando evidentemente contro le intuizioni dello spazio ordinario (euclideo, appunto), non presenta contraddizioni logiche. Il fatto che possano non presentarsi contraddizioni logiche se in un sistema assiomatico (se pur originariamente non formale) ben funzionante (nella fattispecie quello euclideo) si modificano uno o più assiomi ci sembra oggi evidente, ma allora, quando non erano ancora stati studiati i sistemi assiomatici, questo poteva sembrare abbastanza sconvolgente.
Le geometrie non euclidee non ebbero una gran risonanza fino al 1854, anno di pubblicazione d'*Uber die Hypotesen welche der Geometrie zu Grunde liegen (Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria)* del più influente Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Si fece quindi un grosso passo verso la *generalizzazione* della geometria e, conseguentemente, verso il progressivo abbandono dell'intuizione spaziale, che, come abbiamo detto, costituiva uno dei due pilastri su cui poggiava l'intero edificio della matematica.
La situazione è descritta perfettamente da Paolo Zellini:
"Il pensare che la geometria parli d'oggetti le cui proprietà debbono dedursi principalmente dagli *assiomi* (così, dopo Riemann, sentenziò Hilbert nelle sue *Grundlagen der Geometrie*, 1899) offrì sicuramente un ulteriore apporto all'idea di una matematica che sceglie *da sé*, fuori dell'imperativo di presunte *essenze* precostituite, le basi della propria edificazione. I «punti» e le «linee» cominciano ad essere non più cose chiare in sé, ma oggetti descritti da proposizioni atte a specificarne l'*uso*, e quindi, in buona misura, prodotti di scelte volontarie, d'assiomi revocabili o di convenzioni «prestabilite». La «realtà» naturale era certamente in grado, ancora, di influire sulle scelte, ma non di condizionarle del tutto"[3].
Ciò determina, come già affermato in precedenza, la caduta di uno dei pilastri fondamentali della matematica, l'intuizione, e in particolar modo quella geometrica

[2] Questa è solo la versione abbreviata del titolo originale, molto più lungo.
[3] P. Zellini, *La ribellione del numero*, Adelphi, Milano 1985, p. 13.

viene meno: gli assiomi non sono più “verità evidenti” che come solida roccia garantiscono la fondazione del sistema geometrico ma, puri e semplici “cominciamenti”, punti di partenza convenzionalmente scelti ed ammessi per effettuare la costruzione deduttiva della teoria.

La nascita della logica matematica

La nascita della *logica*, che potrebbe essere definita come *la scienza che studia le forme e le leggi del pensiero*, coincide con la nascita del pensiero filosofico[4]. La storia della logica si può dividere in due fasi: la logica aristotelica e la logica moderna[5]. La logica aristotelica, il cui primo teorizzatore fu appunto Aristotele, si fonda prevalentemente sul *sillogismo*, in altre parole "un ragionamento consistente di tre parti, una premessa maggiore, una premessa minore e una conclusione”.[6] e sulla deduzione. Con *logica matematica* o *formale* si vuole indicare quella branca della logica moderna che rappresenta i modi del pensiero con combinazioni di stringhe di segni e, spogliate queste d’ogni significato, riconduce lo studio del pensiero allo studio di tali stringhe e alle leggi che ne regolano le trasformazioni.

L'anno che di solito si sceglie per datare la nascita della logica matematica è il 1847, anno di pubblicazione di *The mathematical Analysis of Logic (L'analisi matematica della logica)* di Gorge Boole (1815-1864), anche se forse sarebbe più giusto scegliere l'anno 1854, in cui uscì l'*Investigation of the Laws of Tought (Investigazione sulle leggi del pensiero)* sempre di Boole.

Le idee più innovative contenute nelle opere di Boole sono:

1. La convinzione che la logica è collegata con la matematica più che con la metafisica;
2. La concezione della logica come scienza che studia le "forme" dei ragionamenti più che i loro "contenuti", da cui la cosiddetta "formalizzazione della logica";
3. la convinzione che la vera essenza della matematica risiede nella logica che vi sta sotto, non negli oggetti classici (numeri e figure) del suo studio.

La rivoluzione epocale portata da Boole fu appunto quella di formalizzare la logica aristotelica, eliminando il lato “psicologico” di essa, inventando quello che oggi è chiamato “metodo simbolico”.

Naturalmente lo sviluppo della logica formale fu, nei dettagli, un processo molto complicato che un resoconto schematico come quello che qui si sta facendo non può rendere a pieno. Ad esempio essa fu, nei primi tempi, indissolubilmente legata all'algebra astratta, e spesso è quasi impossibile scindere i progressi fatti nelle due discipline, proprio per il fatto che esse sono nate come un unicum e solo in seguito distinte. (Questa sorta di commistione sussiste in ogni modo per quasi tutte le branche della matematica nel loro stadio embrionale.)

In risposta alle problematiche generate dalla richiesta d’assiomatizzazione sviluppata in seno alle geometria, e ai nuovi strumenti resi possibili dalla

[4] Naturalmente ci riferiamo solo all'Occidente.
[5] La *logica scolastica* la comprendiamo in quell’aristotelica.
[6] B. Russell, *Storia della filosofia occidentale,* TEA, Milano 2001, p. 203.
Un esempio di sillogismo: tutti gli uomini sono mortali (premessa maggiore); Socrate è un uomo (premessa minore); Socrate è mortale (conclusione).

formalizzazione della logica e dall'introduzione del metodo simbolico, per quanto riguarda a questione dei fondamenti è possibile individuare tre indirizzi distinti:

- Logicismo, che prese le mosse dall'esistenza di rigore nell'ambito dell'aritmetica e si sviluppa nel tentativo di ricondurre l'aritmetica alla logica;
- Formalismo, che si ricollega alle tendenze originatesi nel campo dell'algebra astratta;
- Intuizionismo, che ricerca il fondamento della matematica nell'intuizione temporale irriducibili ad altri tipi di conoscenza.

Il logicismo

Il logicismo è la prima grande corrente filosofica/matematica svillupatasi nell'ultimo decennio del 19° secolo, in risposta alle problematiche sollevate dalle nuove teorie matematiche, contribuendo per primo alla questione dei fondamenti.
Comunemente il logicismo viene associato soprattutto con Frege, Russell e Whitehead.
L'iniziatore di questa scuola, con i suoi *Grundgesetze der Arithmetik,* Frege tenta di pervenire alla definitiva fondazione del sistema dell'aritmetica sulla logica e nella formulazione originale pone due punti fondamentali:

- Risolvere i concetti matematici, anche quelli considerati non ulteriormente definibili e perciò primitivi, in termini puramente logici;
- Dimostrare i teoremi della matematica mediante l'applicazione dei principi e delle regole d'inferenza del ragionamento logico (sviluppato da Boole).

Di fatto, si può individuare nel logicismo di Frege una fondamentale componente platonica: egli, infatti, attribuisce ai concetti primitivi (e successivamente anche agli insiemi) un'esistenza indipendente dal pensiero umano, rifacendosi alle idee di Platone.
Identifica per ogni concetto due proprietà fondamentali:

- *Estensionalità o significato,* in altre parole l'insieme degli oggetti che cadono sotto quel determinato concetto;
- *Intenzionalità o senso,* in altre parole le proprietà che un determinato oggetto deve avere per cadere sotto quel concetto.

Per esempio, lo zero è un elemento d'estensionalità nulla, in altre parole è l'unico oggetto che cade sotto il concetto di esser diverso da se stesso.
Mentre stava scrivendo il secondo volume dei "Principi dell'aritmetica", Frege ricevette una lettera in cui Bertrand Russell, uno dei pochi a dimostrare interesse per il programma dell'oscuro pensatore tedesco all'inizio del Novecento, gli comunicava un'antinomia fondamentale che vanificava la sua intera opera. L'antinomia è oggi nota con il nome di paradosso di Russell.

Il paradosso di Russel

Il paradosso di Russell (o paradosso del barbiere) è considerato una delle più celebri antinomie della storia del pensiero logico e matematico.

Sarebbe meglio parlare d’antinomia più che di paradosso. Il paradosso è una conclusione logica e non contraddittoria che si scontra con il nostro modo abituale di vedere le cose, l'antinomia è invece una contraddizione. Russell arriva ad una netta e definitiva contraddizione.

Il concetto può essere espresso non formalmente così: "In un villaggio c'è un unico barbiere. Il barbiere rade tutti (e soli) gli uomini che non si radono da soli. Il barbiere rade se stesso?". Anche in questo caso si possono formulare due ipotesi:

- Se il barbiere rade se stesso, allora per definizione il barbiere non rade se stesso;
- Se il barbiere non rade se stesso allora, poiché il barbiere rade tutti quelli che non si radono da soli, il barbiere rade se stesso.

In entrambi i casi siamo arrivati ad una contraddizione.
Tuttavia, il paradosso può essere generalizzato. E appunto una generalizzazione di questo problema portò ad un’antinomia che causò un momento di crisi di tutta la teoria matematica dell'epoca.
Russell aveva formulato, nel 1901, il seguente problema: "Un insieme può essere o meno elemento di se stesso?" Ad esempio, l'insieme di tutti i libri di una biblioteca non è elemento di se stesso. Invece, l'insieme di tutti gli insiemi con più di venti elementi è elemento di se stesso.
Ma se si pensa, invece, all'insieme di tutti gli insiemi che non sono elementi di se stessi? Esso è o no elemento di se stesso? È evidente la somiglianza del problema col paradosso del barbiere. Se l'insieme (detto "I" per comodità) non fosse elemento di se stesso, allora dovrebbe essere elemento di se stesso. E, analogamente, se lo fosse, non dovrebbe esserlo. La posizione di "I" rispetto a se stesso genera ad ogni modo una contraddizione.
La conclusione cui arrivò inizialmente Russell fu di affermare che non basta descrivere una proprietà di un insieme per garantire la sua esistenza. In seguito, introdusse una nuova teoria degli insiemi nella quale gli insiemi si distinguono in diversi livelli, per cui al livello zero avremo gli elementi, al livello uno gli insiemi d’elementi, al livello due gli insiemi d’insiemi d’elementi e così via. In quest’ottica, è possibile risolvere l'antinomia e i paradossi.
Frege non si sarebbe più ripreso dal colpo infertogli da Russell e per il resto della sua vita si sarebbe tenuto lontano dal problema dei fondamenti della matematica:

> Nulla di più indesiderabile può capitare ad uno scienziato del fatto che una delle fondamenta del suo edificio s’incrini dopo che l’opera è finita. E’ questa la situazione in cui mi trovo in seguito ad una lettera (contenente il paradosso) inviatami dal Sig. Bertrand Russel proprio mentre si stava ultimando la stampa di questo (secondo) volume. Solatium miseris, socios habuisse malorum. Anch’io ho questo sollievo, se sollievo lo possiamo chiamare; infatti, chiunque nelle sue dimostrazioni abbia fatto uso d’estensioni di concetti, di classi, d’insiemi (compresi i sistemi di Dedekind) si trova nella mia stessa posizione. Non è soltanto questione del mio particolar modo di gettare le fondamenta, ma è in

QUESTIONE LA POSSIBILITÀ O MENO DI DARE ALL'ARITMETICA UN QUALSIASI FONDAMENTO LOGICO[7].

Con questa dichiarazione, un raro esempio d'ammissione di totale e definitiva sconfitta Frege abbandona il programma logicista.

Al contrario di Frege, Russell si sarebbe cimentato, assieme al collega Alfred North Whitehead, nel tentativo di superare la sua stessa antinomia, dando alla luce i tre ponderosi volumi dei Principia Mathematica, pubblicati tra il 1910 e il 1913. Quest'opera rappresentò il più grandioso tentativo di realizzare il sogno fregeano di una fondazione logica della matematica, anzi lo spirito russelliano si dimostrò ancora più radicale di quello del suo predecessore nella misura in cui arrivò a coinvolgere la geometria, in precedenza esclusa da Frege.
Il sistema assiomatico dei *Principia*, che, a differenza di quelli proposti in precedenza (ad esempio quello di Hilbert per la geometria), conteneva anche le regole di derivazione, si proponeva di descrivere formalmente, attraverso stringhe di segni, le leggi che regolano il pensiero deduttivo. Lo stesso concetto di *verità* di una certa stringa perdeva importanza, a discapito della *dimostrabilità*, cioè della *derivabilità* di tale stringa di segni da un'altra, tramite le regole di derivazione. La *verità*, nei Principia, era però ancora presente. Più che nelle ipotesi, cioè negli assiomi, essa andava cercata nelle regole di derivazione[8]. Per Russell sono esse ad essere intuitive, non gli oggetti cui si applicano. Cioè esse costituirebbero un substrato logico congenito, tramite il quale la mente decide se da alcune premesse è lecito dedurre alcune conseguenze. La matematica sarebbe l'applicazione della logica ad alcuni concetti, come quelli spaziali e quelli temporali, che ci derivano dalle percezioni sensoriali. Non riconosce dunque l'apriorità agli *oggetti* della matematica classica (spazio, retta, punto).
E' difficile esimersi dal citare l'attacco del capitolo *Matematica e logica* dell'*Introduzione alla filosofia matematica*, che sembra quasi il manifesto del Logicismo:

"LA MATEMATICA E LA LOGICA, STORICAMENTE PARLANDO, SONO STATE DUE DISCIPLINE INTERAMENTE DISTINTE. LA MATEMATICA VIENE DI SOLITO IDEALMENTE COLLEGATA CON LA SCIENZA, LA LOGICA CON I GRECI. MA ENTRAMBE SI SONO SVILUPPATE NELL'EPOCA MODERNA: LA LOGICA È DIVENTATA PIÙ MATEMATICA E LA MATEMATICA È DIVENTATA PIÙ LOGICA. LA CONSEGUENZA È CHE ADESSO È ASSOLUTAMENTE IMPOSSIBILE TIRARE UNA LINEA TRA LE DUE, PERCHÉ SONO UNA COSA SOLA. DIFFERISCONO COME IL RAGAZZO E L'UOMO: LA LOGICA È LA GIOVENTÙ DELLA MATEMATICA, E LA MATEMATICA È LA MATURITÀ DELLA LOGICA".[9]. SOTTO SI DICE: "LA LOGICA TRADIZIONALE DICE: «TUTTI GLI UOMINI SONO MORTALI, SOCRATE È UN UOMO, QUINDI SOCRATE È MORTALE». ORA È CHIARO CHE CIÒ CHE *INTENDIAMO* ASSERIRE, TANTO PER COMINCIARE, È CHE LE PREMESSE IMPLICANO LA

[7] G. Frege, The basic Laws of Arithmetics: Exposition of the System, University of California press, 1964, pg. 127
[8] Per Russell, in ogni modo, gli assiomi non sono arbitrari. Però ad essi si riconosce un valore di *verità* diverso da quello riconosciuto alle regole di derivazione: la verità degli assiomi dipende dall'esperienza sensibile, quella degli schemi logici è assoluta, fuori dallo spazio e dal tempo.
[9] B. Russell, *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano 1963, p. 310.

CONCLUSIONE, NON CHE LE PREMESSE E LA CONCLUSIONE SONO EFFETTIVAMENTE VERE. [...] GLI ENUNCIATI LOGICI SONO CONOSCIBILI *A PRIORI*, SENZA STUDIARE IL MONDO REALE. SOLTANTO DA UNO STUDIO DEI FATTI EMPIRICI SAPPIAMO CHE SOCRATE È UN UOMO, MA RICONOSCIAMO L'ESATTEZZA DEL SILLOGISMO NELLA SUA FORMA ASTRATTA [...] SENZA BISOGNO DI ALCUN APPELLO ALL'ESPERIENZA".[10].

Egli dunque ritiene che l'unica cosa innata sia la logica. Questa è un'idea discutibile, ma certamente rispettabilissima. Però, quando Russell identifica la matematica con la logica, crediamo, non vuol affermare che chi fa logica fa matematica in senso classico e chi fa matematica in senso classico fa logica. Egli ritiene che la matematica, intesa in senso classico, sia solo una particolare applicazione della logica. D'altra parte, diciamo noi, sono applicazioni della logica anche la linguistica, la ragioneria, la psicologia, ecc. Tutto è applicazione della logica. Ma allora, se pur si volesse identificare la matematica con la logica pura (la logica pura è, per Russell, lo studio degli schemi mentali in sé, espressi in simboli grafici privi di significato), bisognerebbe pur trovare un altro nome per indicare la disciplina che applica la logica ai numeri e alle figure. Quindi ci pare più esatto affermare che Russell ridusse (o cercò di ridurre) la matematica alla logica, più che la identificò con la logica. Infatti, egli si inserisce nella corrente riduzionista, portando questa verso posizioni sempre più esasperate. Comunque si sarebbe dovuto aspettare Hilbert perché il riduzionismo raggiungesse il suo picco massimo.

Hilary Putnam ha detto: "L'aver mostrato che il «confine» fra «logica» e «matematica» è in certo qual modo arbitrario è stata una grande impresa; ed è *stata,* io sostengo, l'impresa dei *Principia*".

La riduzione logicista fu raggiunta da Russell a costo di alcune ambiguità, che negli anni a seguire provocarono il progressivo disfacimento del sistema eretto nei Principia. Punti deboli della sistemazione russelliana si rivelarono:

- L'assioma dell'infinito: esiste un insieme N tale che l'insieme vuoto è in N, e tale che ogni volta che a è un elemento di N, l'insieme formato dall'unione di a con il suo singoletto {a} è anch'esso un elemento di N.In termini matematici:

$$\exists \mathcal{N} : \emptyset \in \mathcal{N} \bigwedge (\forall \mathrm{a} : \mathrm{a} \in \mathcal{N} \implies a \cup \{a\} \in \mathcal{N}$$

- L'assioma della scelta: data una famiglia non vuota di insiemi non vuoti esiste una funzione che a ogni insieme della famiglia fa corrispondere un suo elemento.

Questi assiomi furono introdotti da Russel, perché vi fu costretto, per risolvere l'antinomia da egli stesso creata, sono assolutamente di carattere non logico,fallendo nel la costruzione della certezza matematica dalla logica.

IL FORMALISMO

Hilbert aveva presentato nel 1900, al Congresso d Parigi, una lista di problemi, i quali secondo Hilbert rappresentavano il futuro della matematica, in cui si dava

[10] Ibid. p. 314 e p. 326.

molto peso alle questioni fondazionali, e in particolare alla non contraddittorietà dei sistemi assiomatici utilizzati per *costruire* l'aritmetica. A rendere ancora più impellente il bisogno di una dimostrazione di non contraddittorietà, furono il paradosso di Russell e il discreto successo che stavano riscuotendo le obiezioni degli intuizionisti capitanati da Brouwer.

Negli anni '10, la situazione era abbastanza complicata. Da un lato con i Principia Matematica si era compiuto un passo verso la totale logicizzazione della matematica, dall'altro Brouwer metteva in discussione il principio del terzo escluso (che è uno dei cardini della logica) e riconosceva validi solo i metodi di dimostrazione costruttivi. Nel recente passato, si era ricondotto il problema della non contraddittorietà della geometria a quello della non contraddittorietà dell'aritmetica. Ma l'aritmetica era ridotta ai sistemi assiomatici formali. Per risolvere definitivamente ogni controversia e mettere a tacere in modo definitivo gli intuizionisti, Hilbert mise a punto un programma, che, insieme ai ventitré problemi del 1900, tracciò la strada alla matematica almeno fino agli anni '50:

1. Individuare un sistema assiomatico formale molto semplice tale che:
    - La sua non contraddittorietà sia dimostrabile direttamente, senza ricorrere alla presunta non contraddittorietà di altri sistemi;
    - La sua non contraddittorietà implichi quella di tutti i sistemi assiomatici formali con i quali si può ricostruire tutta la matematica classica;
2. Dimostrare la non contraddittorietà del sistema individuato con metodi di dimostrazione costruttivi, così che tutta la matematica sia al riparo dalle obiezioni degli Intuizionisti.

Per realizzare una tale dimostrazione finitistica, Hilbert fondò una vera e propria disciplina matematica. Essa è la *Teoria della dimostrazione* o *Metamatematica*.

Per i formalisti la matematica può essere completamente dedotta da un sistema assiomatico formale. Per dimostrare, dunque, che la matematica è non contraddittoria è sufficiente <u>dimostrare</u> che quel sistema è non contraddittorio, cioè che, applicando agli assiomi e a ogni formula ben formata le regole d'inferenza stabilite, non sia possibile giungere a due formule ben formate che siano l'una la negazione logica dell'altra, in altre parole, con le notazioni formali, non esiste un enunciato tale che:

$$T \vdash \varphi \bigwedge \neg\varphi$$

Quel "dimostrare" che abbiamo sottolineato è il compito che Hilbert affida alla Metamatematica. I sistemi che egli prende in considerazione sono completamente formalizzati: le costanti sono dei simboli grafici che non stanno a indicare nient'altro che se stessi come pure forme (il numero delle costanti deve essere finito); le variabili sono dei simboli grafici che, secondo alcune regole del sistema, possono essere sostituite con alcune particolari classi di stringhe di costanti (le variabili sono in genere un'infinità numerabile); le regole di formazione servono per individuare, tra tutte le possibili stringhe (di qualsiasi lunghezza) di costanti e/o variabili, solo alcune di esse (generalmente sono un'infinità numerabile) che si chiamano formule o formule ben formate; alcune di esse (anche in questo caso sono generalmente un'infinità numerabile, ma si devono poter indicare con un numero finito di schemi) sono detti assiomi; le regole di derivazione o di trasformazione sono delle regole che indicano quali formule sono derivabili da altre. Lo scopo della matematica sarebbe allora quello di applicare con ingegno le regole di derivazione agli assiomi e alle formule dimostrabili per trovare più formule dimostrabili possibili, senza preoccupazione alcuna di quale sia il "significato" dei suoi segni. Quel che il matematico scrive è per Hilbert completamente privo di significato.

La matematica non è che un gioco combinatorio di forme. Le regole del gioco vanno fissate prima che il gioco inizi, ma non sono del tutto arbitrarie. Lo scopo della *metamatematica* è di controllare che queste regole garantiscano un buon funzionamento del gioco. In un primo momento, quel che noi abbiamo chiamato "buon funzionamento del gioco" è identificato da Hilbert con la *non contraddittorietà*.

Dal 1928 in poi, egli si convinse che era necessaria anche una dimostrazione di *completezza*. La *completezza* di un sistema assiomatico formale è una cosa un po' più complicata della non contraddittorietà. Proviamo comunque a spiegare cosa s'intende. Dato un sistema assiomatico formale, se ne può dare un'interpretazione contenutistica, attribuendo ai suoi enti (che sono, abbiamo detto, pure forme) un *significato*. Così, ad esempio, un sistema formale, originariamente privo di senso, sotto una particolare interpretazione, può descrivere l'aritmetica. L'aritmetica, d'altra parte, è nata prima dei sistemi formali, per cui molte proposizioni aritmetiche ci appaiono evidentemente vere anche senza averle dimostrate, o grazie a una dimostrazione della matematica classica. Se quel sistema formale descrive davvero l'aritmetica che noi conosciamo, deve essere in grado di esprimere quelle proposizioni come formule ben formate, le quali devono risultare dimostrabili in quel sistema. Se ciò non accadesse, quel sistema formale sarebbe ancora validissimo poiché tale, ma sarebbe perfettamente inutile per descrivere l'aritmetica. Una prima definizione di completezza potrebbe quindi essere la seguente: un sistema assiomatico formale si dice *completo relativamente* ad una sua interpretazione contenutistica se ogni proposizione che si riconosce contenutisticamente vera è espressa da una formula ben formata di quel sistema e se questa formula ben formata è dimostrabile in quel sistema. In questa definizione c'è un evidente miscuglio di sintassi e semantica: la verità è un attributo semantico, la dimostrabilità è un attributo sintattico. Inoltre essa era inutile per gli scopi dei formalisti. Infatti, se riconoscessimo di avere la capacità di discernere con sicurezza ciò che è vero da ciò che è falso, non avrebbe senso complicarsi la vita con una selva di simboli incomprensibili per ricostruire delle cose che già conosciamo (al solo scopo di renderle rigorose), le quali servirebbero poi per verificare se quei simboli le descrivono o no[11].

[11] I sistemi assiomatici formali in quanto tali sono uno strumento matematico e logico potentissimo. Se però questi sistemi fossero costruiti con il solo scopo di ricostruire formalmente una parte della matematica, per poi conferire valore di verità matematica a ciò che è dimostrabile nel sistema, e nello stesso tempo si riconoscesse oggettivo il concetto di verità matematica, non v'è dubbio che ci troveremmo di fronte ad un circolo vizioso.

Per i formalisti serviva una definizione "simile" a quella che noi abbiamo dato sopra, ma che riguardasse solo gli attributi sintattici del sistema formale, cioè che facesse riferimento solo alla *dimostrabilità*, non alla *verità*. Diamo questa seconda definizione: un sistema assiomatico formale si dice *completo* se data comunque una formula ben formata di quel sistema, ci sono due casi possibili: a) essa è dimostrabile; b) la sua negazione logica è dimostrabile, in altre parole in termini della logica:

$$\forall \varphi \;\; T \vdash (\varphi \vee \neg \varphi)$$

Una formula ben formata tale che essa o la sua negazione logica siano dimostrabili si dice *decidibile*. Dunque, affermare che un sistema è completo è equivalente a dire che ogni sua formula ben formata è decidibile. Si fa notare che i due casi possibili a) e b) richiesti dalla completezza non si escludono a vicenda. Potrebbe verificarsi il caso che in un sistema formale completo esista una formula F tale che sia F sia ¬ F siano dimostrabili. In tal caso però il sistema sarebbe contraddittorio. Al contrario, in un sistema formale non contraddittorio potrebbe verificarsi che esista una formula F tale che né F né ¬ F siano dimostrabili, cioè che il sistema sia incompleto. E' proprio questo il motivo per cui Hilbert, dal 1928 in poi, inserì sia la dimostrazione della coerenza sia quella della completezza nel suo programma.
Riportiamo un pezzo del discorso di Hilbert, che tenne alla conferenza di Lipsia nel 1922, che ci sembra un'importante fonte per la ricostruzione della sua filosofia matematica, soprattutto in relazione alla polemica intuizionisti-formalisti:

> "La soluzione delle difficoltà offerta dalla mia teoria della dimostrazione può essere resa comprensibile nel modo seguente. Il nostro pensiero è finitario; quando noi pensiamo, si compie un processo finitario. Questa verità che si controlla da sé, è in un certo qual modo impiegata nella mia teoria della dimostrazione in modo che, quando si fosse stabilita una contraddizione, insieme alla conoscenza di questa contraddizione dovrebbe essere stata realizzata anche la relativa scelta tra un'infinità di cose. Nella mia teoria della dimostrazione non viene perciò affermato che può sempre essere compiuto il ritrovamento di un oggetto tra un'infinità di oggetti, ma che tuttavia, senza rischi di errore, ci si può comportare sempre come se la scelta fosse stata compiuta. A Weyl potremmo certo concedere che siamo in presenza di un circolo, ma questo circolo non è vizioso: piuttosto, l'uso del tertium non datur è sempre senza pericolo".

In definitiva, il Formalismo si opponeva a tutte le altre correnti filosofiche. Al Logicismo non riconosceva la priorità della logica sulla matematica. Dell'Intuizionismo non accettava l'esclusione dell'infinito dalla matematica. Citiamo infine uno "sfogo" di Hilbert, in cui non si risparmia nessuno, da Kronecker a Russell:

> "La matematica è una scienza senza ipotesi. Per provarlo non ho bisogno di Dio, come fa Kronecker, o dell'assunzione di una speciale capacità del nostro

INTELLETTO RELATIVA AL PRINCIPIO DI INDUZIONE COME FA POINCARÉ, O DELL'INTUIZIONE ORIGINARIA DI BROUWER O, INFINE, COME FANNO RUSSELL E WHITEHEAD, DEGLI ASSIOMI DELL'INFINITO, DI RIDUCIBILITÀ, O DI COMPLETEZZA, CHE, IN EFFETTI, SONO ASSUNZIONI CONTENUTISTICHE CHE NON POSSONO ESSERE GIUSTIFICATE CON UNA DIMOSTRAZIONE DI COERENZA".

L'INTUIZIONISMO

L'intuizionismo è un approccio alla matematica in cui ogni oggetto matematico è considerato un prodotto dell'attività costruttiva della mente umana. Per l'intuizionismo, l'esistenza di un ente è equivalente alla possibilità della sua costruzione. Prima della nascita alla fine del 1800 della moderna Teoria degli insiemi, ad opera soprattutto di Cantor, era diffusa l'idea della matematica come fondata sull'intuizione. Tuttavia il vero iniziatore della scuola intuizionistica è stato il matematico olandese Luitzen Brouwer.

Secondo Brouwer le antinomie della matematica hanno origine puramente verbale che non intaccano il pensiero matematico reale: la matematica viene prima del linguaggio e della logica. Linguaggio e logica sono semplici strumenti di comunicazione. Brouwer negava ogni tipo di priorità della logica sulla strada della conoscenza matematica e riaffermava il carattere puramente intuitivo dei concetti matematici.

La matematica si fonda sull'intuizione, facoltà capace di isolare nel continuo spazio-temporale. Si considerano "esistenti" solo gli oggetti matematici costruibili, cioè che possono essere costruiti con un numero finito di passi: gli enti primitivi, da cui iniziare la costruzione di tutta la matematica, erano dettati dall'intuizione. Tutti gli altri non hanno senso alcuno, per cui è perfettamente inutile speculare su di essi. La concezione brouweriana, però, dell'intuizione non è un ritorno alla filosofia kantiana dello spazio e del tempo. Egli riconosce, infatti, come intuizione primaria quella del tempo (che genera i numeri naturali), ma in alcun modo quella dello spazio.

Brouwer, contrastando la linea logicista, va inserito comunque in quella corrente, che va da Kronecker a Poincaré, che cerca di recuperare l'identità della matematica come scienza indipendente dalla logica: la matematica ha un contenuto proprio che le proviene direttamente e senza mediazione dall'intuizione ed è come tale indipendente tanto dall'esperienza sensoriale quanto dalla strutturazione logica. In questo senso la logica non è altro che una veste che per scopi di comunicazione è imposta a contenuti che ne sono del tutto indipendenti. Per Brouwer la stessa capacità di esprimersi in un linguaggio è una dimostrazione dell'innata capacità di percepire la ripetizione di un atto, l'individuazione della diversità di più cose nel tempo, cioè l'intuizione del discreto, della quantità, del numero. I logicisti, e ancor più i formalisti, per Brouwer, sostengono cose letteralmente senza senso.

Inoltre respingono il principio del terzo escluso: esso verrebbe, infatti, a significare che per ogni possibile costruzione (problema) essa è stata effettuata A o si è dimostrato che è impossibile ¬A. Un'affermazione di onniscienza francamente inaccettabile. Eliminando il principio del terzo escluso si utilizza una delle più potenti forme di dimostrazione, già utilizzata da Euclide: la dimostrazione per assurdo. Conseguentemente Brouwer e tutta la scuola intuizionistica rifiutano in

modo categorico tutti i metodi non costruttivi, procedendo alla costruzione di una matematica alternativa e indipendente.
B. Boyer riferisce che Brouwer:

> "[…] chiedeva ai formalisti se fosse vero o falso che "la successione 123456789 compare in qualche punto della rappresentazione decimale di ". Poiché non esiste nessun metodo per decidere in merito, non è possibile applicare qui la legge del terzo escluso e affermare che tale proposizione è vera o falsa". Una possibile obiezione al ragionamento con cui Brouwer confuta la validità universale del principio del terzo escluso potrebbe essere la seguente: come si fa a escludere a priori che non esiste un metodo di carattere algebrico o geometrico, diverso dal brutale metodo della costruzione-ricerca, che dimostri che la successione di cifre 123456789 è necessariamente presente (o necessariamente assente) nella rappresentazione decimale di π? E se si dimostrasse, ad esempio, che la cifra nove non può comparire dopo la successione 12345678? Un'altra obiezione pertinente potrebbe essere quella di seguito. Brouwer dice di aver dimostrato che: il principio del terzo escluso non è universalmente valido. La sua dimostrazione sarebbe la seguente: i casi sono due: a) il principio del terzo escluso è universalmente valido; b) il principio del terzo escluso non è universalmente valido. Se per assurdo fosse vera a) si dovrebbe poter decidere se la successione 123456789 compare nella rappresentazione decimale di π. Poiché questo non è possibile (per Brouwer) a) deve essere falsa. Allora, per il principio del terzo escluso segue che deve essere vera b), cioè il principio del terzo escluso non è universalmente valido. Un corollario immediato del precedente ragionamento è che le tesi dimostrate utilizzando il principio del terzo escluso non possono essere accettate. Da questi due ragionamenti segue che la tesi del primo non può essere accettata, cioè che la tesi che il principio del terzo escluso non è universalmente valido non può essere accettata."[12]

L'intuizionismo conseguì dapprima scarso successo tra i matematici, sia per il suo discutibile psicologismo, sia per il linguaggio astruso (fu merito del più noto discepolo di Brouwer, Heyting, aver riformulato molte tesi intuizionisti che in un linguaggio maggiormente prossimo a quello matematico tradizionale, favorendone la diffusione), ma anche perché, con il suo rifiuto dei metodi non costruttivi, sembrava dover inevitabilmente condurre alla perdita di una parte espressiva della matematica. In seguito, soprattutto dopo che si dimostrò capace di recuperare con nuovi strumenti quella parte della matematica che sembrava escludere da sé, ha finito con vincere le prevenzioni dei matematici e col destarne più vivo interesse.

La situazione negli anni venti

Alla fine degli anni venti il dibattito sui fondamenti era diventato un po' più statico. Il Logicismo di Russell fu, delle tre, la dottrina meno seguita. L'Intuizionismo di

[12] C. B. Boyer, Storia della matematica, I.S.E.D.I, p. 703

Brouwer attecchì solo su un gruppo ristretto di studiosi, che intrapresero il lungo e difficile cammino della *ricostruzione intuizionista* di tutta la matematica, svolgendo quindi un percorso parallelo e distinto dal resto della comunità. Il Formalismo di Hilbert, sebbene fosse a molti *filosoficamente antipatico*, era di fatto considerato vincente. Perché il trionfo fosse definitivo era necessaria però la fatidica dimostrazione di coerenza e di completezza di un sistema assiomatico formale che potesse esprimere l'aritmetica. Molti erano i logici che lavoravano per questo. Sembrava che fosse ormai solo questione di tempo. Anche gli oppositori di Hilbert aspettavano. Quella dimostrazione avrebbe comportato l'affermazione del punto di vista formalista. Tutta la matematica si sarebbe modificata. Le dimostrazioni future sarebbero divenute pure manipolazioni di segni. A parte gli Intuizionisti che si erano estromessi anche dalla matematica classica, i Logicisti e tutti quelli che avevano posizioni intermedie, se pur non fossero stati convinti, neanche da quella dimostrazione, ad accettare il punto di vista formalista, sarebbero stati costretti a convivere con una matematica nuova.

Nel 1931 uscì l'articolo *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I* [13] *(Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei Principia Mathematica e di sistemi affini I)* di Kurt Gödel, in cui si dimostravano i due seguenti risultati:

1. Il sistema assiomatico formale che si ottiene "aggiungendo alla logica di PM gli assiomi di Peano" e tutti quelli *simili* (Gödel specifica cosa vuol dire di preciso *simili*) a esso sono incompleti, cioè in quei sistemi esistono formule ben formate (che Gödel chiama semplicemente *formule*) indecidibili, cioè tali che né esse né le loro negazioni logiche sono dimostrabili in quei sistemi.
2. Se tali sistemi fossero coerenti, in essi non sarebbe possibile dimostrare la loro coerenza.
3. Tra le formule indecidibili ce ne sono alcune che riguardano l'elementare aritmetica degli interi.

Nonostante Gödel abbia tenuto a precisare, nell'introduzione al suo articolo, che i suoi teoremi non confutano il programma formalista, poiché in linea teorica l'esistenza di dimostrazioni finitiste di coerenza e di completezza *di altro genere* non si può escludere a priori, i suoi teoremi posero fine alle pretese formaliste di una matematica che si *autogiustifica*.
Il dibattito sui fondamenti si protrasse per molti anni ancora, ma andò via via scemando, fino ad arrivare ai nostri giorni completamente affievolito.
In ogni caso la *crisi dei fondamenti della matematica* vera e propria può considerarsi chiusa nel 1931.
I lavori di Gödel costituiscono dunque la fine del periodo più dinamico e tormentato attraversato dalla filosofia matematica, se si esclude la scoperta delle grandezze incommensurabili da parte dei pitagorici.

[13] Quel "I" è dovuto all'iniziale intenzione di Gödel di pubblicare in seguito una seconda parte dell'articolo, in cui avrebbe dato le dimostrazioni rigorose d'alcuni teoremi, tra cui anche quello d'indimostrabilità della coerenza, che sono solo accennate. In realtà egli non pubblicò mai questa seconda parte. Gli storici e i biografi di Gödel attribuiscono tale mancata pubblicazione al successo con il quale fu accolto il primo articolo, che avrebbe, come dire, reso *superfluo* tornare ancora sull'argomento. In ogni caso rimangono molti dubbi sulle vere motivazioni che indussero il logico a non dare le versioni *definitive* delle sue dimostrazioni.

Sarebbe ingeneroso però vedere Gödel solo da questo punto di vista *negativo*. Infatti, al di là dell'indiscusso valore tecnico, la logica gödeliana (che tra l'altro non si limita al lavoro del '31 costituisce un punto nodale di tutta la matematica novecentesca.

Passiamo dunque all'analisi dei teoremi di Incompletezza di Gödel, partendo dalla vita dell'autor3.

KURT GÖDEL: LA VITA

Affermatosi, al di là di ogni confronto, come il più importante logico dei nostri tempi in seguito ai suoi notevoli risultati degli anni trenta, Kurt Gödel era anche una figura molto particolare nei suoi modi di vita e di pensiero. Profondamente chiuso in se stesso e riservato, egli aveva una superba e onnicomprensiva razionalità, che poteva trasformarsi in un'esasperata attenzione per i dettagli nelle questioni. Il genio si manifesta, ma come e perché, e che cosa è che lo nutre? Quale relazione s'instaura con la personalità, che cosa determina i particolari canali presi dall'intelletto e il carattere distintivo di quello che realizza? Come per ogni pensatore straordinario, le domande cui vorremmo davvero trovare una risposta nel ripercorrere la vita e la carriera di Gödel sono quelle che si rivelano le più elusive.

Kurt Friedrich Gödel nacque il 28 aprile 1906, secondogenito di Rudolf e Marianne Gödel. Il luogo di nascita era Brunn, nella provincia austro-ungarica della Moravia. Questa regione aveva una popolazione mista, a maggioranza ceca ma con una rilevante minoranza di lingua tedesca, cui appartenevano i genitori di Gödel. Il padre Rudolf, un uomo pieno d'iniziativa che si era fatto da sé, era venuto da Vienna a lavorare a Brunn nella fiorente industria tessile. In seguito sarebbe diventato direttore e comproprietario della principale ditta tessile della zona. La famiglia della madre di Kurt, che proveniva dalla Renania, era stata anch'essa attirata a Brunn dalle prospettive nelle attività tessili. Marianne aveva ricevuto un'istruzione superiore alla media, in parte in una scuola francese di Brunn, attraverso cui aveva sviluppato interessi culturali che mantenne per tutta la vita.
La maggior parte dell'informazione che disponiamo sulla storia della famiglia deriva dal dottor Rudolf Gödel, fratello di Kurt e di lui più anziano di quattro anni. Rudolf ci informa che la fanciullezza di Gödel è stata in linea di massima felice, anche se egli era timido e poteva essere facilmente turbato. All'età di sei o sette anni, Kurt contrasse una febbre reumatica e, nonostante ne fosse uscito completamente ristabilito, si convinse di averne subito, in conseguenza, un irreparabile danno cardiaco. Si manifestano così i primi segni della successiva preoccupazione di Gödel per la propria salute. Anche i suoi speciali talenti intellettuali furono presto evidenti. In famiglia, Kurt era chiamato Herr Warum (il signor Perché) per la sua continua curiosità. I genitori fecero battezzare Kurt nella Chiesa luterana, seguendo la religione della madre piuttosto che quella del padre (che era un "vecchio" cattolico). Nel 1912, all'età di sei anni, egli fu iscritto alla scuola luterana di Brunn. Dal 1916 al 1924, Kurt frequentò le scuole pubbliche, dove si mise in mostra come uno studente eccezionale, riportando i massimi voti in tutte le materie; brillava in particolare in matematica, in lingue e in religione. (A questa non era dato molto rilievo in famiglia

ma Kurt vi si dedicò con serio impegno). Alcuni quaderni di appunti di Gödel dei suoi anni studenteschi sono stati conservati e di essi colpisce soprattutto la precisione del lavoro in geometria.
La prima guerra mondiale, anche se si svolse durante gli anni scolastici di Gödel, ebbe uno scarso effetto diretto su di lui e la sua famiglia. La regione di Brunn era lontana dai fronti principali e fu risparmiata dalle devastazioni portate altrove in Europa dalla guerra. Ma il collasso dell'impero austro-ungarico alla fine della guerra e l'assorbimento della Moravia insieme alla Boemia nel nuovo stato ceco-slovacco avrebbero alla lunga pesato negativamente sulla minoranza di lingua tedesca. Uno dei segni visibili più immediati della nuova identità nazionale fu l'accantonamento del nome tedesco 'Brunn' a favore del nome ceco 'Brno'. Per i Gödel, tuttavia, negli anni immediatamente seguenti la vita continuò sostanzialmente come prima, con la famiglia allora agiatamente sistemata in una villa.
Conseguita la licenza liceale a Brno nel 1924, Gödel si trasferì a Vienna per iniziare i suoi studi universitari. Vienna sarebbe stata la sua città per i successivi quindici anni e nel 1929 egli sarebbe anche diventato cittadino austriaco. La nuova repubblica d'Austria, creata in seguito al collasso dell'impero austro-ungarico nel 1918, si era subito trovata a navigare in acque difficili. Quello straordinario centro culturale e intellettuale che era stata Vienna prima della guerra fu trasformato dalle mutate condizioni postbelliche , ma lo spirito e l'atmosfera viennese resistettero, partecipando ora del generale fermento rivoluzionario e dell'eccitamento degli anni venti. Non passò molto tempo che Gödel fu portato a contatto col Circolo di Vienna, una fucina di nuovo pensiero che si sarebbe rivelata molto significativa per il suo lavoro e i suoi interessi.
All'università Gödel fu dapprima incerto tra lo studio della matematica e quello della fisica, anche se sembra che propendesse per il secondo. Si dice che la sua decisione di concentrarsi sulla matematica sia stata dovuta al suo gusto per la precisione e alla grande impressione che gli fece uno dei suoi professori, lo specialista di teoria dei numeri Philipp Furtwängler. Gödel non parlava quasi mai, ma era molto pronto a cogliere i problemi e a indicare le strade per le soluzioni. Benché fosse molto tranquillo e riservato, divenne subito evidente che egli aveva un talento eccezionale. L'aiuto di Gödel era molto richiesto ed egli lo offriva sempre quando ce ne era bisogno. Gli si poteva parlare senza problemi; egli era sempre molto chiaro sul punto in questione e spiegava le cose lentamente e con calma.
Hans Hahn divenne l'insegnante principale di Gödel. Fu Hahn che introdusse Gödel nel gruppo di filosofi che facevano riferimento a Moritz Schlick, titolare della cattedra di Filosofia delle Scienze Induttive. Il gruppo di Schlick fu in seguito battezzato "Circolo di Vienna" e fu identificato con la dottrina filosofica chiamata positivismo logico o empirismo logico. L'ambizione di questa scuola era di analizzare la conoscenza in termini logici ed empirici; essa cercava di rendere scientifica la filosofia stessa e rigettava la speculazione metafisica. Gödel frequentò abbastanza regolarmente le riunioni del Circolo nel periodo 1926-1928, ma negli anni successivi se ne allontanò gradualmente, anche se continuò a mantenere contatti regolari con alcuni dei suoi membri, in particolare con Rudolf Carnap.

Una delle ragioni principali del defilarsi di Gödel fu che egli aveva sviluppato forti vedute filosofiche personali che erano, in larga misura, quasi diametralmente opposte alle vedute dei positivisti logici. Nonostante ciò, la sfera di interessi che permeava il Circolo ha senz'altro influenzato l'orientamento degli interessi e del lavoro di Gödel.

Le influenze più dirette su Gödel, per quanto riguarda il suo orientamento nella scelta di un impegno creativo, sembra che le abbiano avute alcune conferenze di Carnap sulla logica matematica e la pubblicazione nel 1928 dei *Grundzuge der theoretischen Logik* da parte di David Hilbert e Wilhelm Ackermann. In assoluto contrasto con i massicci tomi di Whitehead e Russell, i Grundzuge erano un volume snello, non troppo elaborato e scritto in stile matematico, e senza dubbio di grande fascino per Gödel, con il suo gusto per l'esposizione concisa. Presentata come un problema aperto nel libro era la questione se un certo sistema di assiomi per il calcolo dei predicati del primo ordine fosse completo. In altre parole, se fosse sufficiente per la derivazione di ogni enunciato logicamente valido (nel senso di risultare corretto sotto ogni possibile interpretazione dei suoi termini e predicati di base). Gödel ottenne una soluzione positiva del problema della completezza e con questo notevole successo ebbe inizio la sua carriera di ricerca. Il lavoro, che sarebbe diventato la sua tesi di dottorato all'Università di Vienna, era finito nell'estate del 1929, quando egli aveva ventitré anni. La laurea fu conferita nel febbraio del 1930 e una versione rivista della tesi fu pubblicata come Gödel 1930. Anche se il riconoscimento del fondamentale significato di questo lavoro doveva imporsi solo gradualmente, sul momento i risultati erano già sufficientemente notevoli, tanto da procurare a Gödel una reputazione di astro nascente.
I dieci anni 1929-1939 furono un periodo di lavoro intenso che produsse i principali risultati di Gödel nel campo della logica matematica. Nel 1930 egli incominciò ad approfondire il programma di Hilbert di stabilire la non contraddittorietà dei sistemi assiomatici formali per la matematica. I sistemi che erano già stati isolati come oggetto di particolare attenzione erano quelli che trattavano gli argomenti generali di aritmetica "superiore", di analisi e di teoria degli insiemi. Gödel iniziò a lavorare sul problema della coerenza dell'analisi, che egli cercava di ridurre a quello dell'aritmetica, ma nel suo progetto incontrò un ostacolo connesso ai ben noti paradossi della verità e della definibilità nei linguaggi ordinari. Gödel da una parte capì che questi paradossi non si applicavano ai linguaggi precisamente specificati dei sistemi formali che stava considerando e, dall'altra, comprese che argomenti analoghi ma non paradossali potevano essere portati avanti sostituendo la nozione di dimostrabilità a quella di verità. Sviluppando questa intuizione, egli arrivò alle seguenti inaspettate conclusioni. Qualunque sistema formale S in cui può essere sviluppato un certo ammontare di aritmetica teorica e che soddisfa alcune condizioni minimali di coerenza è incompleto: si può costruire un enunciato aritmetico elementare A tale che né A né la sua negazione sono dimostrabili in S. In effetti, l'enunciato così costruito è vero, poiché esso esprime la propria indimostrabilità in S, attraverso una rappresentazione nell'aritmetica della sintassi di S. Inoltre, si può costruire nell'aritmetica un enunciato C che esprime la coerenza di S, e C non è dimostrabile in S se S è coerente. I risultati di incompletezza furono pubblicati nel 1931; le conclusioni e i caratteri del tutto originali del suo argomento attirarono presto l'attenzione di ampi settori e Gödel venne riconosciuto come il pensatore guida in questo campo.

Uno dei primi a riconoscere il potenziale significalo dei risultati di incompletezza di Gödel e a incoraggiarlo a proseguire verso un loro più ampio sviluppo fu John von Neumann.'Di soli tre anni più vecchio di Gödel, von Neumann era già ben noto negli ambienti matematici per i suoi brillanti ed estremamente diversificati contributi alla teoria degli insiemi, alla teoria della dimostrazione, all'analisi e alla fisica matematica. Altri, tra quelli interessati alla logica matematica, furono più lenti ad assorbire la novità del lavoro di Gödel. Paul Bernays, ad esempio, che era assistente e collaboratore di Hilbert, pur accettando subito i risultati di Gödel, ebbe difficoltà a capire le dimostrazioni, difficoltà che furono superate solo con le chiarificazioni apportate da una ripetuta corrispondenza. II lavoro di Gödel suscitò anche critiche in certi ambienti, critiche invariabilmente motivate dalla mancanza di chiarezza circa le necessarie distinzioni da porre, quale la distinzione tra le nozioni di verità e di dimostrazione. In generale, tuttavia, i teoremi di incompletezza furono ben presto assimilati da coloro che lavoravano nel filone principale della logica matematica; anzi, si può onestamente dire che i metodi e i risultati di Gödel vennero a permeare tutti gli aspetti della ricerca in quel campo.
Il lavoro di Gödel sull'incompletezza divenne la sua Habilitationsschrift (tesi di libera docenza) presso l'Università di Vienna nel 1932. Nella sua relazione, Hahn lodò il lavoro di Gödel come epocale, il conseguimento di un risultato di prim'ordine.' La Habilìtation conferiva il titolo di Privatdozent e comportava per Gödel la venia legendi, il diritto di tenere lezioni all'università, ma senza retribuzione eccetto che per le tasse che egli poteva raccogliere dagli studenti. Negli anni seguenti, tuttavia, egli avrebbe insegnato solo in modo intermittente a Vienna.
Nel frattempo, cambiamenti significativi avevano anche avuto luogo nella vita personale di Gödel. All'età di ventuno anni, egli aveva incontrato la sua futura moglie, Adele Nimbursky (nata Porkert), ma le differenze delle loro condizioni avevano suscitato obiezioni allo sviluppo della relazione da parte dei genitori di Gödel, soprattutto del padre. Adele era una ballerina, era già stata sposata per un breve periodo ed era più vecchia di sei anni di Kurt. Anche se il padre doveva morire poco dopo, Kurt e Adele non si sarebbero sposati se non dopo dieci anni.
Il padre di Kurt morì inaspettatamente nel 1929, all'età di cinquantaquattro anni; per fortuna, lasciò la famiglia in una rassicurante situazione economica. La madre di Gödel affittò un appartamento a Vienna per lei e i due figli, pur conservando la villa di Bino. A quella data, il fratello di Kurt, Rudolf, si era già fatto una posizione di prestigio come radiologo. Rudolf non si sarebbe mai sposato, e durante il periodo in cui vissero insieme a Vienna, tutti e tre spesso uscivano insieme, specialmente per frequentare il teatro. Secondo suo fratello, in famiglia Kurt faceva l'impossibile per "nascondere la sua luce sotto lo staio", nonostante la sua crescente fama internazionale.

Nel corso dei primi anni trenta, Gödel estese sistematicamente la sua conoscenza in molte aree della logica e della matematica. Agli inizi del 1930 Tarski trascorse alcune settimane a Vienna e fu allora presentato a Gödel; Gödel colse l'occasione per discutere con lui i risultati della sua tesi del 1929.
All'inizio, con la sua posizione non retribuita di Privatdozent, Gödel doveva dipendere dalle risorse della famiglia per il suo mantenimento. Presto però queste risorse furono integrate dal reddito derivante da posizioni occupate come visitatore negli Stati Uniti d'America. La prima visita di Gödel fu all'Institute for Advanced

Study di Princeton durante l'anno accademico 1933-1934. L'istituto era stato formalmente creato nel 1930 e affidato alla direzione iniziale di Abraham Flexner, che due anni dopo nominò come primi professori Albert Einstein e Oswald Veblen. Veblen era uno dei capi dello sviluppo della matematica superiore in America e aveva giocato un ruolo decisivo nell'organizzazione di un eccellente dipartimento di matematica nell'Università di Princeton; fu lui in gran parte responsabile per la scelta degli ulteriori "incomparabili" professori di matematica dell'Institute for Advanced Study: James Alexander, Marston Morse, John von Neumann e Hermann Weyl.

La visita di Gödel nel 1933-1934 fu la prima delle tre che avrebbe fatto all'Institute for Advanced Study prima di assumervi residenza permanente nel 1940. Egli tenne delle lezioni a Princeton sui risultati di incompletezza nella primavera del 1934. Pare che avesse già cominciato a lavorare con una certa intensità su problemi di teoria degli insiemi; comunque, si sentì piuttosto solo e depresso durante questo soggiorno a Princeton. Al ritorno in Europa ebbe una crisi nervosa e passò un certo periodo in cura. Negli anni seguenti ci sarebbero state ricorrenti manifestazioni di depressione mentale e di esaurimento. Una nuova visita già programmata a Princeton dovette essere rinviata alla fine del 1935 e poi fu inaspettatamente interrotta dopo due mesi, di nuovo a causa di disturbi mentali. Un altro periodo fu passato in convalescenziario nel 1936, e Gödel non fu in grado di svolgere attività all'Università di Vienna fino alla primavera del 1937.

In seguito si dedicò alla teoria degli insiemi. Il suo risultato principale, raggiunto finalmente nell'estate del 1937, fu che sia l'assioma di scelta che l'ipotesi del continuo (anche in una generalizzazione naturale, GCH) sono compatibili con gli assiomi di Zermelo-Fraenkel (ZF) senza assioma di scelta, e quindi non possono essere refutati su questa base, se gli assiomi di ZF sono coerenti. Questo risultato forniva almeno una minima garanzia di tranquillità nell'uso degli enunciati apparentemente problematici AC e CH.

Gli anni 1937-1939 portarono ulteriori significativi cambiamenti nella vita sia privata che pubblica di Gödel. Sua madre ritornò nella casa di Brno nel 1937, mentre il fratello rimaneva a Vienna a continuare la sua pratica medica. L'allontanamento della madre può aver facilitato il progetto matrimoniale di Kurt Gödel e Adele Nimbursky, realizzato finalmente nel settembre del 1938. Il matrimonio di Kurt e Adele si rivelò tenero e duraturo, e per Kurt una fonte di costante sostegno negli anni difficili che gli stavano davanti.

Questi cambiamenti, e altri collegati, avvenivano nel contesto delle difficili condizioni economiche che avevano stretto le nazioni europee in seguito alla severa depressione del 1929 e della situazione politica creata dall'avvento al potere di Adolf Hitler e dei nazisti nel 1933 in Germania. Nel 1934 anche l'Austria cadde sotto il dominio di un regime semi-fascista, guidato da Engelbert Dollfuss fino al suo assassinio da parte di un nazista austriaco più avanti nello stesso anno. L'assassinio di Dollfuss fu un tentativo prematuro da parte dei nazisti di conquistare il potere in Austria e di realizzare l'Anschhluss (unione politica ed economica) dell'Austria alla Germania, che era stata proibita dal trattato di Saint-Germain nel 1919. C'era molto favore per l'Anschluss tra certi gruppi di austriaci, ma la spinta principale veniva da Hitler, e crebbe costantemente finché la minaccia di invasione da parte di Hitler non fece cadere nella primavera del 1938 il governo di Schuschnigg, che era succeduto a Dollfuss. L'Austria allora divenne una provincia della più estesa Germania nazista.

L'anno 1938 vide l'inizio di una generale trasformazione della vita culturale e intellettuale austriaca, simile a quella vissuta dalla Germania cinque anni prima. Vi fu un esodo di intellettuali, specialmente di quelli di origini ebraiche, per i quali andarsene era una questione di sopravvivenza, mentre per altri l'emigrazione fu una reazione alla politica ultranazionalista e razzista caratteristica del regime nazista. Quanto a Gödel, la sua posizione era fondamentalmente apolitica e non impegnata; mentre non era senz'altro inconsapevole di quello che stava capitando, egli ignorava le sempre più evidenti implicazioni delle trasformazioni circostanti.
Gödel fece un altro soggiorno in America nel 1938-1939. Egli trascorse il semestre autunnale all'Institute for Advanced Study, dove tenne lezioni sui suoi nuovi risultati riguardanti la non contraddittorietà dell'assioma di scelta e dell'ipotesi generalizzata del continuo. Per il semestre primaverile. Quindi Gödel ritornò a Vienna per riunirsi alla moglie, che aveva lasciato l'autunno prima.
Gödel aveva intenzione di ritornare all'Institute for Advanced Study nell'autunno del 1939, ma si frapposero complicazioni di natura politica; la sua vita veniva ora a essere direttamente toccata dal regime nazista. Gödel scrisse disperato a Veblen nel novembre del 1939, chiedendo aiuto per partire. In qualche modo si ottennero i visti fuori quota di immigrazione USA e i permessi di espatrio tedeschi, e Kurt e Adele riuscirono a lasciare Vienna nel gennaio del 1940. Siccome era troppo pericoloso a quel punto attraversare l'Atlantico in nave, essi viaggiarono invece per treno attraverso l'Europa orientale, quindi attraverso la Russia e la Manciuria con la transiberiana per giungere infine a Yokohama. Di qui raggiunsero in nave San Francisco e nel marzo del 1940 finalmente arrivarono in treno a Princeton.
Gödel non doveva più tornare in Europa. Fino alla fine gli rimase un'amarezza per quello che aveva subito in Austria nel 1939-1940, di cui tendeva ad attribuire la responsabilità più alla "sciatteria" austriaca che non all'imposizione oltraggiosa dei nazisti. Nel 1940 Gödel fu nominato Membro Ordinario dell'Institute for Advanced Study ed egli e la moglie si stabilirono a Princeton, dove organizzarono una tranquilla vita sociale. Tra gli amici più cari di Gödel c'erano Albert Einstein e Oskar Morgenstern. Quest'ultimo era anche un ex viennese, era emigrato nel 1938 e aveva avuto un posto all'Università di Princeton. Già ben qualificato come economista matematico, Morgenstern doveva in seguito diventare famoso presso un vasto pubblico per il suo importante e influente lavoro con von Neumann, *The Theory of games and economic behavior* (1944). (von Neumann sarebbe stato invece meno accessibile a Gödel negli anni quaranta essendo spesso assente dall'istituto per gli impegni attinenti alla sua qualifica di consulente in innumerevoli progetti governativi militari.)
Morgenstern aveva molti aneddoti da raccontare riguardanti Gödel. Ad esempio quello concernente l'occasione in cui, nell'aprile del 1948, Gödel divenne cittadino americano, con Einstein e Morgenstern come testimoni. Gödel doveva sottoporsi al rituale esame per la cittadinanza e si preparò molto seriamente, studiando con attenzione la Costituzione degli Stati Uniti. Il giorno prima dell'udienza Gödel si presentò a Morgenstern in stato di agitazione, dicendo: "Ho scoperto una possibilità logico-legale per cui gli USA potrebbero trasformarsi in una dittatura". Morgenstern si rendeva conto che, quali che fossero i meriti logici dell'argomentazione di Gödel, le possibilità di una realizzazione erano di carattere estremamente ipotetico, e raccomandò a Gödel di sorvolare sulla sua scoperta durante l'esame. La mattina seguente, Morgenstern accompagnò Gödel ed Einstein in macchina da Princeton a

Trenton, dove si doveva svolgere la procedura per la cittadinanza. Lungo il percorso Einstein continuò a raccontare aneddoti divertenti uno dietro l'altro per distrarre Gödel, ma evidentemente senza molto successo. Il funzionario di Trenton rimase giustamente impressionato dalla presenza di Einstein e di Morgenstern, e li invitò ad assistere all'esame, che di solito si svolgeva in privato. Incominciò rivolgendosi a Gödel: "Finora lei ha avuto la cittadinanza tedesca". Gödel lo corresse, spiegando che era austriaco. "Ad ogni modo, " continuò il funzionario, "era sotto una malvagia dittatura... ma per fortuna, questo non è possibile in America." "Al contrario, " esclamò Gödel, "io so come può succedere!" Tutti e tre ebbero il loro daffare per trattenere Gödel dallo sviluppare la sua scoperta, in modo che la procedura potesse essere completata con il suo esito desiderato.
La persona che, durante gli ultimi anni, fu certamente di gran lunga il miglior amico di Einstein, e che sotto certi aspetti stranamente più gli assomigliava, fu Kurt Gödel, il grande logico. Essi erano molto diversi tra loro sotto quasi ogni aspetto caratteriale - Einstein socievole, contento, pieno di allegria e di buon senso, e Gödel estremamente solenne, molto serio, solitario, diffidente del buon senso per arrivare alla verità. Ma essi avevano in comune una qualità fondamentale: entrambi affrontavano i problemi andando sempre direttamente e passionalmente al centro delle cose.
All'Institute for Advanced Study Gödel non aveva impegni ufficiali ed era libero di dedicarsi alla sua ricerca e ai suoi studi come meglio voleva. Durante i primi cinque anni della sua permanenza egli continuò a lavorare nel campo della logica matematica, muovendosi in diverse direzioni. In particolare, egli dedicò enormi sforzi alla dimostrazione dell'indipendenza dell'assioma di scelta e dell'ipotesi del continuo, ma con successi solo parziali e solo sul primo problema. I risultati dei suoi sforzi su questo problema non furono mai pubblicati; restano da decifrare (se sarà possibile) i quaderni di appunti nel suo Nachlass. Un altro successo iniziale di questo primo periodo (anche se non pubblicato fino al 1958) fu una nuova interpretazione costruttiva dell'aritmetica, che dimostrava la sua coerenza, ma con strumenti che andavano al di là di quelli palesemente finitiste nel senso di Hilbert.
Dal 1943 in avanti Gödel si dedicò quasi esclusivamente alla filosofia, prima alla filosofia della matematica e, in seguito, alla filosofia generale e alla metafisica. Il 1944 segna la pubblicazione del suo scritto sulla logica matematica di Bertrand Russell, che fu molto importante sia per la sua approfondita analisi del lavoro di Russell, sia per l'esplicita enunciazione in esso contenuta della visione propria "platonista" di Gödel sulla realtà degli oggetti matematici astratti.
L'unica eccezione a questo indirizzo di pensiero sembra sia stato il sorprendente lavoro di Gödel sulla teoria generale della relatività nel periodo 1947-1951, lavoro in cui egli produsse nuovi e inaspettati modelli cosmologici che, in teoria, permettono il "viaggio nel tempo" nel passato. Secondo la testimonianza di Gödel, questo lavoro non derivò dalle sue discussioni con Einstein, ma fu motivato piuttosto dal suo personale interesse per la filosofia dello spazio e del tempo di Kant. Einstein per parte sua era impegnato, come era stato per molto tempo, nella costruzione di una teoria unificata dei campi, un progetto rispetto cui Gödel nutriva delle perplessità. In questo lavoro Gödel mise a frutto tecniche matematiche e intuizioni fisiche che per uno avente familiarità solo con i suoi scritti di logica erano impensabili.

Oltre a riflettere gli interessi primari di Gödel in logica, filosofia e, in misura minore, matematica e fisica, i quaderni di appunti rimasti sono sorprendentemente di ampio respiro e, ad esempio, rivelano permanenti interessi di storia e di teologia.
Gödel fu nominato membro permanente dell'Institute for Advanced Study nel 1946. La sua successiva promozione a professore nel 1953 implicava per lui il dovere di partecipare a qualche aspetto della gestione dell'Institute for Advanced Study. Egli dedicò una gran quantità di tempo al disbrigo di questi compiti e, in particolare, prese molto a cuore il problema delle risposte alle sempre più frequenti domande di ammissione come visitatori da parte di logici. Quando la logica incominciò a fiorire in quel periodo, l'Institute for Advanced Study divenne una mecca per i giovani logici - molti di essi astri in ascesa - e attirava anche vecchi colleghi della generazione di prima della guerra, ad esempio Paul Bernays. Gödel limitava i contatti con la maggior parte dei visitatori più giovani, anche se prestava sempre seria attenzione al loro lavoro e alle loro idee ed era prodigo di consigli.
Dal 1951, Gödel cominciò a ricevere molti riconoscimenti. Di particolare valore e significato furono nel 1951 il Premio Einstein (la cui prima assegnazione egli condivise con Julian Schwinger), la sua scelta per le Conferenze Gibbs nel 1951 da parte dell'American Mathematical Society, la sua elezione a membro della National Academy of Sciences (1955), dell'American Academy of Arts and Sciences (1957) e della Royal Society (1968). Nel 1975 gli fu conferita la National Medal of Science da parte del presidente Ford, ma a causa delle cattive condizioni di salute egli non potè presenziare alla cerimonia.
Negli ultimi quindici anni la vita di Gödel fu riempita dai contatti con i visitatori, gli affari dell'Institute for Advanced Study e i suoi studi filosofici; durante tutto questo periodo egli tornò a occuparsi di logica solo raramente, con la revisione di alcuni scritti e l'aggiunta di alcune note a nuove traduzioni.
La salute di Gödel fu precaria dagli anni sessanta in avanti. Tra le altre cose, soffriva di prostata e gli era stato raccomandato un intervento chirurgico cui egli non volle mai acconsentire. Insieme alle sue tendenze ipocondriache, egli aveva anche una completa sfiducia nel parere dei medici. (Già negli anni quaranta, ad esempio, egli aveva rinviato così a lungo l'intervento per un'ulcera perforata che sarebbe morto senza una trasfusione di sangue, fatta in condizioni di emergenza.). Oltre alla prostata, egli era sempre convinto che il suo cuore fosse debole, nonostante non ci fossero conferme mediche di alcun tipo. Durante gli ultimi anni della sua vita, la moglie Adele non era più in grado di assisterlo come prima, perché era lei stessa parzialmente impedita dalle conseguenze di un colpo patito, per cui dovette essere anche ospitata, per un certo periodo, in una casa di cura. Le depressioni di Gödel si susseguivano, accompagnate e aggravate dalla paranoia; si era creato l'incubo di poter essere avvelenato, e non voleva più ingerire cibo. Egli morì all'ospedale di Princeton il 14 gennaio 1978 di "malnutrizione e inanizione causata da disturbi della personalità". Adele gli sopravvisse tre anni e morì il 4 febbraio 1981. Kurt e Adele non avevano figli, e il fratello di Kurt, Rudolf, rimase l'unico membro sopravvissuto della famiglia Gödel.

La filosofia della matematica per Gödel

Gödel è ben caratterizzato per la sua adesione decisa senza tentennamenti a una forma di realismo matematico (o "platonismo"). In questa generica propensione si

trova in compagnia di famosi matematici e logici del calibro di Cantor, Frege, Zermelo, Church. Questo tipo di visione della matematica si accorda inoltre con le concezioni implicite nell'atteggiamento di lavoro della maggior parte dei matematici attivi (la "maggioranza silenziosa"). Tuttavia, la riflessione sviluppatasi sulla filosofia della matematica a partire dalla fine dell'Ottocento è stata critica, in misura preponderante, nei confronti delle posizioni realiste e ha prodotto una serie di punti di vista alternativi (e contrapposti), che vanno sotto i nomi di costruttivismo, formalismo, finitismo, nominalismo, predicativismo, definizionismo, positivismo e convenzionalismo. I critici della posizione realista hanno sollevato obiezioni sia ontologiche sia epistemologiche. Per quanto si riferisce alle prime, le idee di oggetti matematici come entità astratte con un'esistenza indipendente, in particolare le classi infinite come totalità "completate", sono considerate problematiche. Rispetto alle seconde, sono state sollevate questioni circa l'ammissibilità di principi come quelli del terzo escluso e l'assioma di scelta, ciascuno a suo modo responsabile di certe dimostrazioni non-costruttive di esistenza. Soprattutto nella prima parte del secolo, i paradossi delle classi trovati da Cantor, Burali-Forti e Russell furono vissuti come richiedenti tra l'altro una radicale riconsiderazione dell'approccio insiemistico, filosoficamente platonista, ai fondamenti della matematica. Hilbert e Brouwer sono state forse le figure più influenti tra quelle che hanno proposto schemi fondazionali alternativi nel periodo in cui Gödel incominciava a lavorare in logica. Hilbert aveva elaborato un programma per "garantire" la matematica - inclusa, egli sperava, la teoria degli insiemi di Cantor - per mezzo di dimostrazioni unitarie di coerenza per sistemi assiomatici formali. Brouwer rifiutava le dimostrazioni di esistenza non-costruttive e le concezioni cantoriane delle infinità "attuali" e cercava di ricostruire la matematica secondo la sua versione intuizionistica del costruttivismo.
Le caratteristiche principali della filosofia della matematica di Gödel che emergono da queste fonti sono le seguenti. Gli oggetti matematici hanno un'esistenza indipendente e una realtà analoga a quella degli oggetti fisici. Le affermazioni della matematica si riferiscono a tale realtà e la loro verità e determinata da fatti oggettivi che sono indipendenti dai nostri pensieri e dalle nostre costruzioni. Noi possiamo non avere una percezione diretta degli oggetti matematici soggiacenti, così come può succedere per gli oggetti fisici soggiacenti, ma - ancora per analogia - la loro esistenza è necessaria per dedurre le percezioni sensoriali immediate. L'assunzione di oggetti matematici e di assiomi su di essi è necessaria per ottenere un soddisfacente sistema di matematica, esattamente come l'assunzione degli oggetti fisici e delle leggi fisiche fondamentali è necessaria per rendere conio in modo soddisfacente del mondo delle apparenze. Un esempio di "dati sensoriali" matematici che richiedono questo tipo di spiegazione è fornito dalle particolarizzazioni delle proposizioni aritmetiche le cui generalizzazioni universali richiedono assunzioni che trascendono l'aritmetica; la loro esistenza è una conseguenza del teorema d'incompletezza di Gödel. Anche se non è detto che gli oggetti matematici e le loro proprietà ci siano immediatamente accessibili, l'intuizione matematica può essere una fonte di genuina conoscenza matematica. Tale intuizione può essere coltivata mediante lo studio approfondito di un argomento, attraverso il quale uno può essere condotto ad accettare nuove affermazioni come assiomi di base. Un'altra giustificazione per gli assiomi matematici può essere individuata nella loro utilità e nella ricchezza delle loro

conseguenze; questo criterio tuttavia è meno sicuro di quello che è garantito dall'intuizione.
Nella corrispondenza riprodotta con Wang nel 1974, Gödel individua la ragione preponderante del suo principale successo, laddove altri avevano fallito, nelle sue concezioni realistiche; di esse dice che l'hanno liberato dai pregiudizi filosofici del tempo che avevano invece bloccato gli altri. Egli attribuisce anche alla sua credenza nell'oggettività della verità matematica il merito di averlo condotto al teorema d'incompletezza.

Gödel filosofo e commentatore

Proponiamo qui di seguito alcuni scritti autentici di Gödel, tratti dalla seconda conferenza sull'Epistemologia delle Scienze Esatte svoltosi nel 1930, in cui Gödel appunto analizza e scrive sulle relazioni tenute da Carnap, Heyting e von Neumann rappresentanti delle tre scuole filosofico - matematiche principali, rispettivamente Logicismo, Intuizionismo e Formalismo. Con il suo stile chiaro, conciso ed essenziale traccia i tratti principali delle loro conferenze.

Carnap: "*Die logizistische Grundlegung der Mathematik*" (La fondazione logicista della matematica)

Oltre a dare una presentazione molto chiara dei punto di vista logicista, questa comunicazione fornisce un'esposizione dettagliata delle difficoltà che ancora oggi persistono e un tentativo per superarle. La tesi del logicismo è duplice, propriamente: tutti i concetti matematici sono riducibili a nozioni logiche mediante definizioni esplicite; tutti i teoremi matematici sono ottenibili per via deduttiva dai princìpi della logica.

Il significato dei due asserti è precisato e illustrato con esempi (concetto di numero naturale e di numero reale). Per quanto riguarda il secondo punto, si fa riferimento alla difficoltà che sorge dall'assioma dell'infinito e da quello della scelta, in quanto questi due assiomi, in vista del loro carattere esistenziale, non appartengono ai princìpi della logica pur essendo necessari alla dimostrazione di molti teoremi matematici. Questa difficoltà, comunque, si può superare facilmente se, come fa Russell, si aggiungono gli assiomi in questione alle premesse dei teoremi in oggetto, ottenendo così teoremi dimostrabili per via puramente logica.[...]. Per evitare la circolarità che sembra risultare da questo genere di definizione, Russell ha elaborato la sua teoria "ramificata" dei tipi nella quale, però, non è possibile una trattazione adeguata dei numeri reali senza ricorrere all'assioma di riducibilità (che oggi è generalmente considerato inaccettabile). L'autore cerca di risolvere la difficoltà facendo a meno della teoria ramificata dei tipi, che si afferma essere superflua. [...] Secondo quanto affermato nel lavoro in esame, anche F.P. Ramsey ha cercato di giustificare questo punto di vista, ma con argomenti che sono inaccettabili a causa

DELL'ASSOLUTISMO CONCETTUALE (PLATONISMO) CHE AD ESSI SOTTENDE. [...]PER QUANTO RIGUARDA I PARADOSSI LOGICI, CHE PER RUSSELL FURONO UN'ALTRA RAGIONE PER L'INTRODUZIONE DELLA TEORIA RAMIFICATA DEI TIPI, L'AUTORE FA RIFERIMENTO ALLE RICERCHE DI RAMSEY SUL TEMA E AFFERMA CHE ESSE HANNO DIMOSTRATO CHE LE ANTINOMIE, PRESENTABILI IN GENERALE CON SEGNI LOGICI, SONO GIÀ ELIMINATE DALLA TEORIA SEMPLICE DEI TIPI.

HEYTING :DIE INTUITIONISTISCHE GRUNDLEGUNG DER MATHEMATIK“ *(LA FONDAZIONE INTUIZIONISTA DELLA MATEMATICA)*

L'AUTORE PER PRIMA COSA ESPONE L'ATTEGGIAMENTO FILOSOFICO DEGLI INTUIZIONISTI PER I QUALI LA MATEMATICA È UNA FUNZIONE NATURALE DELL'INTELLETTO, UN PRODOTTO DELLO SPIRITO UMANO E PERTANTO ESSI NON CONCEDONO ESISTENZA OGGETTIVA, INDIPENDENTE DAL PENSIERO, ALLE ENTITÀ MATEMATICHE. QUESTA CONCEZIONE - CHE GLI OGGETTI MATEMATICI ESISTONO SOLO NELLA MISURA IN CUI POSSONO ESSERE ATTUALMENTE COMPRESI DAL PENSIERO UMANO - PORTA AL RIGETTO DELLE DIMOSTRAZIONI PURAMENTE ESISTENZIALI, COME PURE A QUELLO DEL PRINCIPIO DEL TERZO ESCLUSO IN TUTTI I CASI IN CUI NON È POSSIBILE DECIDERE EFFETTIVAMENTE TRA LE ALTERNATIVE. LA CONCEZIONE INTUIZIONISTA DELLA MATEMATICA VIENE ILLUSTRATA CON DIVERSI ESEMPI. PER COMINCIARE, VENGONO SPIEGATE LA DEFINIZIONE BROUWERIANA DI NUMERO REALE E IL SUO CONCETTO DI SEQUENZA DI SCELTA. QUESTO CONCETTO, COME L'AUTORE MOSTRA, NON SOSTITUISCE TANTO I SINGOLI NUMERI REALI QUANTO LA TOTALITÀ DEI NUMERI REALI POSSIBILI, O SOTTOINSIEMI DI QUESTA TOTALITÀ, NEL CASO LA LIBERTÀ DI SCELTA SIA IN QUALCHE MODO RISTRETTA DA UNA REGOLA. VIENE INOLTRE DISCUSSA BREVEMENTE LA DEFINIZIONE DI INSIEME DATA DA BROUWER E ABBOZZATA UNA DIMOSTRAZIONE DEL SEGUENTE TEOREMA DELLA MATEMATICA INTUIZIONISTA: SE SI ASSOCIA UN NUMERO INTERO A OGNI NUMERO REALE, ALLORA TUTTI I NUMERI REALI AVRANNO ASSOCIATO LO STESSO NUMERO. COME CONCLUSIONE DELLA COMUNICAZIONE VIENE DISCUSSA LA LOGICA PROPOSIZIONALE INTUIZIONISTA. VIENE FATTA UNA DISTINZIONE TRA PROPOSIZIONI E ASSERZIONI (QUESTE ULTIME INDICATE DA FREGE E RUSSELL CON IL SEGNO $\vdash$). UNA PROPOSIZIONE ESPRIME UN'ASPETTATIVA (UN'INTENZIONE) E, PIÙ PRECISAMENTE, UN'ASPETTATIVA RIGUARDANTE UN'ESPERIENZA CONSIDERATA POSSIBILE; L'ASSERZIONE CORRISPONDENTE SIGNIFICA IL SODDISFACIMENTO DELL'INTENZIONE. PER ESEMPIO, LA PROPOSIZIONE "C È RAZIONALE" SIGNIFICA L'ASPETTATIVA DI POTER TROVARE DUE NUMERI INTERI A E B TALI CHE C = A/B. IL PRINCIPIO DEL TERZO ESCLUSO ESPRIME L'ASPETTATIVA CHE, PER OGNI ENUNCIATO MATEMATICO, O SI PUÒ PROVARLO O SI PUÒ RIDURLO ALL'ASSURDO E UNA SUA DIMOSTRAZIONE SAREBBE POSSIBILE SOLO ATTRAVERSO LA SPECIFICAZIONE DI UN METODO GENERALE PER GIUNGERE A QUESTA DECISIONE. L'INTENZIONE CHE UNA PROPOSIZIONE VALGA E L'INTENZIONE CHE ESSA SIA DIMOSTRABILE DEVONO ESSERE DISTINTE, ANCHE SE LE ASSERZIONI CORRISPONDENTI SONO LE STESSE. [...]

VON NEUMANN : "DIE FORMALISTISCHE GRUNDLEGUNG DER MATHEMATIK" (LA FONDAZIONE FORMALISTA DELLA MATEMATICA)

L'OBIETTIVO FORMALISTA DI UNA FONDAZIONE DELLA MATEMATICA, COME L'AUTORE SPIEGA, È QUELLO DI GIUSTIFICARE LA MATEMATICA CLASSICA PRENDENDO IN CONSIDERAZIONE I DUBBI SU DI ESSA SOLLEVATI DAGLI INTUIZIONISTI. [...]. NEL DESCRIVERE LE PROCEDURE DELLA MATEMATICA CLASSICA, IL FORMALISMO ADOTTA IN LARGA MISURA QUANTO FATTO DALLA SCUOLA LOGICISTA, MA POICHÉ CONSIDERA QUESTE PROCEDURE NON EVIDENTI DAL PUNTO DI VISTA CONTENUTISTICO MA SOLO UN "GIOCO DI FORMULE", AFFRONTA IL PROBLEMA DI DIMOSTRARE L'UTILITÀ DI QUESTO "GIOCO" PER LA SCIENZA. QUESTO SI DEVE FARE DIMOSTRANDO CHE OGNI FORMULA NUMERICA VERIFICABILE (CALCOLABILE) IN UN NUMERO FINITO DI PASSI, CHE SI PUÒ DERIVARE IN BASE ALLE REGOLE DEL GIOCO FISSATE DALLA MATEMATICA CLASSICA, DEVE RISULTARE CORRETTA UNA VOLTA CHE SIA EFFETTIVAMENTE CALCOLATA. SAREBBE IN QUESTO MODO PROVATA L'APPLICABILITÀ DELLA MATEMATICA CLASSICA ALL'ABBREVIAZIONE DELLE COMPUTAZIONI DELLE ESPRESSIONI ARITMETICHE ED È APPUNTO IN QUESTO MODO CHE LA MATEMATICA CLASSICA SI APPLICA ALL'ESPERIENZA. LA DIMOSTRAZIONE DI QUANTO APPENA DESCRITTO CONSISTE IN UNA DIMOSTRAZIONE DI COERENZA, CHE DIVIENE COSÌ IL PROBLEMA CENTRALE. NATURALMENTE, ESSA DEVE ESSERE CONDOTTA CON METODI INOPPUGNABILI DAL PUNTO DI VISTA CONTENUTISTICO (VALE A DIRE, INTUIZIONISTA). L'AUTORE DESCRIVE LE CARATTERISTICHE FONDAMENTALI DEL METODO ADOTTATO NELLE DIMOSTRAZIONI DI COERENZA E, IN CONCLUSIONE, SOTTOLINEA CHE SINO AD ORA TALI DIMOSTRAZIONI SI SONO OTTENUTE CON SUCCESSO SOLO PER SOTTOSISTEMI DELLA MATEMATICA CLASSICA.

LA CONFERENZA DESCRIVE LO STATO DELLE COSE ALL'EPOCA DEL CONVEGNO DI KÖNIGSBERG. NON SONO CONSIDERATI I RISULTATI OTTENUTI POSTERIORMENTE SULLA IMPOSSIBILITÀ DI DIMOSTRARE LA COERENZA CON METODI PIÙ DEBOLI DI QUELLI FORMALIZZATI NEL SISTEMA IN OGGETTO.

I TEOREMI DI INCOMPLETEZZA DI GÖDEL

PRIMO TEOREMA DI INCOMPLETEZZA

IN OGNI TEORIA MATEMATICA T SUFFICIENTEMENTE ESPRESSIVA DA CONTENERE L'ARITMETICA, ESISTE UNA FORMULA φ TALE CHE, SE T È COERENTE, ALLORA NÉ φ NÉ LA SUA NEGAZIONE $\neg\varphi$ SONO DIMOSTRABILI IN T.

Con qualche semplificazione, il primo teorema afferma che:

In ogni formalizzazione coerente della matematica che sia sufficientemente potente da poter assiomatizzare la teoria elementare dei numeri naturali — vale a dire, sufficientemente potente da definire la struttura dei numeri naturali dotati delle operazioni di somma e prodotto — è possibile costruire una proposizione sintatticamente corretta che non può essere né dimostrata né confutata all'interno dello stesso sistema.

SECONDO TEOREMA DI INCOMPLETEZZA

SIA T UNA TEORIA MATEMATICA SUFFICIENTEMENTE ESPRESSIVA DA CONTENERE L'ARITMETICA: SE T È COERENTE, NON È POSSIBILE PROVARE LA COERENZA DI T ALL'INTERNO DI T .

Con qualche semplificazione:*Nessun sistema coerente può essere utilizzato per dimostrare la sua stessa coerenza.*

Proponiamo infine l'incipit dell'articolo "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I" del 1931,con nel quale vengono dimostrati i teoremi sopracitati,destinati a distruggere le speranze fondazionali degli altri matematici del tempo,primo fra tutti, Hilbert.
La seconda parte dell'articolo,benché estremamente importante non è stata inserita,a causa dell'enorme complessità matematica dell'articolo stesso.

SULLE PROPOSIZIONI FORMALMENTE INDECIDIBILI DEI PRINCIPIA MATHEMATICA E DI SISTEMI AFFINI I (1931)

LO SVILUPPO DELLA MATEMATICA VERSO UNA SEMPRE MAGGIOR ESATTEZZA HA CONDOTTO, COM'È BEN NOTO, ALLA FORMALIZZAZIONE DI SUE AMPIE PARTI, DI MODO CHE SI POSSA DIMOSTRARE BASANDOSI SOLO SU POCHE REGOLE MECCANICHE. I SISTEMI FORMALI PIÙ AMPI FINO AD OGGI PROPOSTI SONO DA UN LATO QUELLO DEI PRINCIPIA MATHEMATICA (PM) E DALL'ALTRO IL SISTEMA DI ASSIOMI DI ZERMELO-FRAENKEL PER LA TEORIA DEGLI INSIEMI (IN SEGUITO SVILUPPATO DA J. VON NEUMANN). QUESTI DUE SISTEMI SONO COSÌ AMPI CHE IN ESSI RISULTANO FORMALIZZABILI, CIOÈ RIDUCIBILI A POCHI ASSIOMI E REGOLE D'INFERENZE, TUTTI I METODI DI DIMOSTRAZIONE OGGI IN USO NELLA MATEMATICA. SI POTREBBE QUINDI SUPPORRE CHE QUESTI ASSIOMI E REGOLE D'INFERENZA SIANO SUFFICIENTI PER DECIDERE TUTTI I PROBLEMI MATEMATICI CHE SI POSSANO COMUNQUE ESPRIMERE FORMALMENTE IN ESSI. MOSTREREMO NEL SEGUITO COME CIÒ NON VALGA, CHE ANZI NEI DUE SISTEMI INDICATI ESISTONO PROBLEMI RELATIVAMENTE SEMPLICI DELLA TEORIA DEGLI USUALI NUMERI INTERI4 CHE NON POSSONO VENIR DECISI SULLA BASE DEGLI ASSIOMI. QUESTA SITUAZIONE NON DIPENDE IN ALCUN MODO DALLA PARTICOLARE NATURA DEI SISTEMI COSTRUITI, MA ACCADE PER UN'AMPIA CLASSE DI SISTEMI FORMALI, FRA I QUALI, IN PARTICOLARE, VI SONO TUTTI QUELLI CHE SI OTTENGONO DAI DUE SOPRA INDICATI AGGIUNGENDO LORO UN NUMERO FINITO DI ASSIOMI, PURCHÉ CON TALI ASSIOMI AGGIUNTI NON SIANO DIMOSTRABILI PROPOSIZIONI FALSE. PRIMA DI ENTRARE NEI DETTAGLI, VOGLIAMO TRATTEGGIARE L'IDEA PRINCIPALE DELLA DIMOSTRAZIONE, NATURALMENTE SENZA ALCUNA PRETESA DI ESATTEZZA.

LE FORMULE DI UN SISTEMA FORMALE (CI LIMITIAMO QUI AL SISTEMA PM) SONO, VISTE DALL'ESTERNO, SUCCESSIONI FINITE DI SEGNI PRIMITIVI (VARIABILI, COSTANTI LOGICHE, PARENTESI O PUNTI DI SEPARAZIONE) ED È FACILE PRECISARE ESATTAMENTE QUALI SUCCESSIONI DI SEGNI PRIMITIVI SIANO FORMULE SENSATE E QUALI NO. ANALOGAMENTE LE DIMOSTRAZIONI, DA UN PUNTO DI VISTA FORMALE, SONO NULL'ALTRO CHE SUCCESSIONI FINITE DI FORMULE (CON DETERMINATE PROPRIETÀ SPECIFICABILI). PER CONSIDERAZIONI METAMATEMATICHE, È OVVIO CHE NON INTERESSI QUALI OGGETTI SIANO SCELTI COME SEGNI PRIMITIVI, C NOI DECIDIAMO DI IMPIEGARE A QUESTO SCOPO NUMERI NATURALI. UNA FORMULA SARÀ ALLORA UNA SUCCESSIONE FINITA DI NUMERI NATURALI E UNA FIGURA DI DIMOSTRAZIONE SARÀ UNA SUCCESSIONE FINITA DI SUCCESSIONI FINITE DI NUMERI NATURALI. I CONCETTI (PROPOSIZIONI) METAMATEMATICI DIVENGONO IN TAL MODO CONCETTI (PROPOSIZIONI) SUI NUMERI NATURALI O SU LORO SUCCESSIONI E QUESTI POSSONO ESSERE (ALMENO IN PARTE) ESPRESSI CON I SEGNI DELLO STESSO SISTEMA PM. IN PARTICOLARE SI PUÒ MOSTRARE CHE I CONCETTI DI "FORMULA", "FIGURA DI DIMOSTRAZIONE" E "FORMULA DIMOSTRABILE" POSSONO ESSERE DEFINITI ALL'INTERNO DEL SISTEMA PM, CIOÈ È POSSIBILE, PER ESEMPIO, TROVARE UNA FORMULA F (V) DI PM CON UNA VARIABILE LIBERA V (IL CUI TIPO È QUELLO DI UNA SUCCESSIONE NUMERICA)10 TALE CHE F (V), INTERPRETATALA CONTENUTISTICAMENTE, DICA: V È UNA FORMULA DIMOSTRABILE.[...]

IMPLICAZIONI DEI TEOREMI DI GÖDEL

I teoremi di Gödel sono teoremi di logica del primo ordine, e devono essere collocati in questo contesto. Nella logica formale, tanto gli enunciati matematici quanto le dimostrazioni sono entrambe scritte in un linguaggio simbolico, dove è possibile verificare meccanicamente la validità delle dimostrazioni, e non ci possono essere dubbi sul fatto che un teorema sia conseguenza degli assiomi inizialmente elencati. In teoria, qualsiasi dimostrazione sviluppata entro un sistema formale può essere verificata da un computer, e, di fatto, esistono programmi fatti per controllare la validità delle dimostrazioni o per cercare nuove dimostrazioni.

Le conseguenze dell'incompletezza influenzano la filosofia della matematica, e in particolare il formalismo, che basa la definizione dei suoi principi sulla logica formale. Il primo teorema può essere parafrasato dicendo che "non è possibile costruire un sistema assiomatico omnicomprensivo che sia allo stesso tempo in grado di provare tutte le verità matematiche, e nessuna falsità."

D'altro canto, da un punto di vista strettamente formalista, questa parafrasi dovrebbe essere considerata priva di senso, perché presuppone che la "verità" e la "falsità" matematiche siano concetti ben definiti in senso assoluto, e non concetti riguardanti ciascuno specifico sistema formale.

La seguente riformulazione del secondo teorema è ancor più sconcertante per chi si occupa dei fondamenti della matematica:

SE UN SISTEMA ASSIOMATICO PUÒ DIMOSTRARE LA SUA STESSA COERENZA, ALLORA ESSO DEVE ESSERE INCOERENTE.

Pertanto, per stabilire la coerenza di un sistema S, è necessario utilizzare un altro sistema T. Ma una dimostrazione in T non è del tutto convincente salvo che la

coerenza di T non sia già stata stabilita senza usare il sistema S. Ad esempio, la coerenza degli assiomi di Peano per i numeri naturali può essere dimostrata nella teoria degli insiemi, ma non nella sola teoria dei numeri naturali. Ciò fornisce una risposta negativa al problema numero due del famoso elenco di David Hilbert sulle più importanti questioni aperte della matematica (noto come elenco dei Problemi di Hilbert).
Alcuni studiosi ritengono che un enunciato, che non può essere dimostrato all'interno di un sistema deduttivo, possa essere ben dimostrabile con l'uso di un metalinguaggio. E che ciò che non può essere dimostrato in quel metalinguaggio può probabilmente essere dimostrato tramite un meta-metalinguaggio. Questo processo, in teoria, può essere riprodotto ad infinitum in modo ricorsivo. Se ci si richiama ad una specie di super Teoria dei Tipi con un assioma di Riducibilità - che con un procedimento induttivo si estende all'intero universo stratificato dei linguaggi - sarebbe possibile, di volta in volta, aggirare l'ostacolo dell'incompletezza.
Occorre notare che i teoremi di Gödel sono applicabili solamente a quei sistemi assiomatici sufficientemente potenti.
"Sufficientemente potenti" vuol affermare che la teoria contiene un numero sufficiente di regole aritmetiche per consentire la costruzione della codifica necessaria alla dimostrazione del primo teorema d'incompletezza. In pratica, tutto ciò che si richiede, sono alcune regole elementari riguardanti l'addizione e la moltiplicazione, come ad esempio avviene nella formalizzazione nell'aritmetica di Robinson. Esistono sistemi assiomatici ancora più deboli che sono coerenti e completi, ad esempio l'aritmetica di Presburger, in cui si può dimostrare qualsiasi enunciato vero del primo ordine che riguarda la sola addizione.
Il sistema assiomatico può consistere di un numero infinito d'assiomi (come nell'aritmetica del primo ordine di Peano), ma, per applicare il teorema di Gödel, deve esistere un algoritmo che sia effettivamente in grado di verificare la correttezza delle dimostrazioni. Ad esempio, l'insieme di tutti gli enunciati del primo ordine che sono veri nel modello dei numeri naturali forma un sistema è completo; Qui, il teorema di Gödel non si può applicare perché non esiste una procedura efficace in grado di decidere se un certo enunciato sia o non sia un assioma. Infatti, questo fatto è proprio una conseguenza del primo teorema d'incompletezza di Gödel.
Gödel stesso dimostrò una versione dei precedenti teoremi che è tecnicamente leggermente più povera, mentre la prima dimostrazione dei teoremi nella forma qui presentata è stata fornita da J. Barkley Rosser nel 1936.
Secondo Roger Penrose questa (presunta) differenza tra "ciò che può meccanicamente essere dimostrato" e "ciò che può essere riconosciuto come vero dall'uomo" mostra che l'intelligenza umana non ha una natura algoritmica. Questa convinzione è sottoscritta anche da JR Lucas in "Minds, Machines and Gödel."
Quest'opinione non è generalmente condivisa perché, come ha sostenuto Marvin Minsky, l'intelligenza umana può commettere errori e può comprendere affermazioni che sono in realtà incoerenti o false. Ciò nonostante, Marvin Minsky ha raccontato che Kurt Gödel gli disse personalmente della sua convinzione nel fatto che gli esseri umani possiedono un modo intuitivo, non solo computazionale, per arrivare alla verità e che quindi il suo teorema non pone limiti a ciò che può essere riconosciuto come vero dall'uomo.
L'opinione secondo cui il teorema mostrerebbe la capacità degli uomini di trascendere la logica formale può anche essere messa in questione nel seguente

modo: non è possibile sapere se l'affermazione p è vera o no, perché non si sa, e non è possibile stabilirlo, se il sistema è coerente. Quindi, in pratica, non è possibile conoscere alcuna verità esterna al sistema.

Fraintendimenti del teorema di Gödel

L'ampia discussione suscitata dal primo teorema d'incompletezza di Gödel ha anche prodotto numerosi fraintendimenti. In questa sezione sono chiarificate le più comuni interpretazioni erronee:

1. Il teorema si applica solamente a quei sistemi che consentono di definire i numeri naturali come un insieme. Non è sufficiente che il sistema contenga i numeri naturali. È anche necessario che, utilizzando gli assiomi del sistema e la logica del primo ordine, si possa esprimere il concetto "x è un numero naturale". Esistono numerosi sistemi che contengono i numeri naturali e che sono completi. Ad esempio sia i numeri reali sia i numeri complessi hanno assiomatizzazioni complete.
2. È possibile dimostrare una proposizione indecidibile con un dato sistema d'assiomi semplicemente aggiungendo appositi assiomi. Ad esempio è possibile dimostrare il Teorema di Goodstein, che tratta di numeri interi, accettando gli assiomi dei numeri transfiniti, che sono classi d'infinito superiori all'infinito dei numeri interi. Più chiaramente è possibile innalzare al rango di nuovo assioma precisamente l'affermazione indecidibile (oppure anche la sua negazione, anch'essa indecidibile), ottenendo così una nuova teoria matematica, come nel caso dell'analisi non-standard. Questo meccanismo è infinitamente ripetibile. Si potrebbe quindi affermare che la gödelizzazione funge da generatore d'assiomi sensati.
3. Lo stesso Gödel non credeva che i suoi teoremi avrebbero distrutto la fede nella matematica: disse, infatti, che semplicemente la completezza dell'aritmetica non poteva essere dimostrata dagli assiomi dell'aritmetica, ma occorreva qualcos'altro.

Dimostrazione del primo teorema di Gödel

Il lavoro di Gödel è estremamente difficile. Esso richiede svariate definizioni preliminari, e teoremi di logica non direttamente citati nell'articolo. Si darà nel seguito una dimostrazione per permettere di comprendere la struttura e l'argomentazione della dimostrazione, eliminando tutti i formalismi in realtà richiesti.

Fondamentalmente, la dimostrazione del primo teorema consiste nella costruzione, all'interno di un sistema assiomatico formale, di una certa affermazione p a cui si può dare la seguente interpretazione meta-matematica:

P = "Quest'affermazione non può essere dimostrata"

In questa veste, essa può essere vista come una moderna variante del paradosso del mentitore. Diversamente dall'affermazione del mentitore, p non fa riferimento diretto a se stessa; la precedente interpretazione può solamente essere formulata dall'esterno del sistema formale. Se il sistema formale è coerente, la prova di Gödel mostra che p (e la sua negazione) non possono essere dimostrate nel sistema. Pertanto p è "vera" (p afferma che non può essere dimostrata, e non può essere

dimostrata) ma non può essere formalmente dimostrata nel sistema. Si noti che aggiungere p all'elenco degli assiomi non aiuterebbe a risolvere il problema: ci sarebbe un'altra, simile affermazione di Gödel costruibile nel sistema allargato.
Il problema principale che deve essere affrontato per sviluppare l'idea di dimostrazione precedentemente formulata è il seguente: per costruire un enunciato p che sia equivalente a "p non può essere dimostrato", p deve in qualche modo contenere un riferimento a p, in altre parole a se stesso, il che potrebbe dare facilmente origine ad un processo infinito d'autoreferenzialità. L'idea geniale che ebbe Gödel, fu quella di descrivere un calcolo formalizzato nel quale tutte le notazioni aritmetiche ordinarie possono essere espresse e nel quale è possibile stabilire le relazioni aritmetiche familiari. Per fare ciò Gödel prende ogni singolo elemento primitivo(come ad esempio la negazione logica) ed ogni assioma e lo descrive per mezzo di numeri. Questo prima parte della dimostrazione è detta "aritmetizzazione della sintassi".
Gödel prende in considerazione il sistema logico dei Principia mathematica e associa ad ogni simbolo primitivo un numero. Di seguito si mostrerà il sistema di numeri e notazioni utilizzato da Gödel stesso:

Costante	Numero di Gödel	Significato
¬	1	Negazione logica
∨	2	Oppure
→	3	Implicazione logica
∃	4	Esiste
=	5	Uguale
0	6	Zero
S	7	L'immediato successore di..
(	8	Segno d'interpunzione
)	9	Segno d'interpunzione
,	10	Segno d'interpunzione

Nella logica vi sono tre tipi di variabili fondamentali:le variabili numeriche "x", "y", "z".. che possono sostituire espressioni numeriche; le variabili proposizionali "p", "q", "r"... le quali possono sostituire proposizioni ; le variabili predicative "P", "Q", "R" le quali possono sostituire predicati quali "primo", "maggiore di".
A queste variabili vengono assegnati dei numeri secondo le seguenti regole:

- Ad ogni variabile numerica assegniamo un primo diverso, maggiore di 10;
- Ad ogni variabile proposizionale assegniamo il quadrato di un primo maggiore di 10;
- Ad ogni variabile predicativa il cubo di un numero primo maggiore di 10.

Consideriamo ora una formula logica del sistema:$(\exists x)(x = sy)$.
I numeri associati ai suoi costituenti elementari sono 8,4,11,9,8,11,5,7,13,9.A questo punto per poter assegnare in modo univoco un numero ad ogni formula,anziché un insieme di numeri,Gödel conviene di associare alla formula il numero dato dal prodotto dei primi n numeri primi, dove n è il numero d'elementi primitivi utilizzati) elevando ognuno ad una potenza pari corrispondete numero del segno elementare.
Pertanto la nostra formula diventa:

$$2^8 \times 3^4 \times 5^{11} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{11} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{13} \times 29^9$$

Ciò che abbiamo fatto finora è stato di stabilire un metodo per "aritmetizzare" completamente il calcolo formale. Il metodo,di fatto, consiste in un insieme d'indicazioni per fissare la corrispondenza biunivoca tra le espressioni del calcolo formale e certi sottoinsiemi dei numeri naturali.(Risulterà evidente di come non ogni numero naturale sia un numero di Gödel.)
In questo modo egli trovò una tecnica grazie alla quale tutte le proposizioni metamatematiche intorno alle proprietà strutturali del calcolo possono essere convenientemente rappresentate nel calcolo stesso. L'idea fondamentale del suo ragionamento è la seguente:dato che ogni espressione del calcolo è associata ad un numero di Gödel,una proposizione metamatematica intorno alle espressioni e alle loro reciproche relazioni può essere costruita come una proposizione intorno ai numeri (di Gödel) corrispondenti.

Successivamente introduce questo concetto: una formula F(x) che contiene una sola variabile libera x è chiamata forma dichiarativa. Quando a x si sostituisce uno specifico numero, la forma dichiarativa si trasforma in un enunciato, potenzialmente vero o falso, che può essere o non essere dimostrabile nel sistema. Le forme dichiarative non sono enunciati e quindi non possono essere dimostrate vere o false. Comunque, ogni forma dichiarativa F(x) ha un suo numero di Gödel che si può denotare con la scrittura G(F). La scelta della variabile libera utilizzata nell'espressione F(x) non è rilevante per l'assegnazione del numero di Gödel G(F).
A partire da un'analisi attenta degli assiomi e delle regole del sistema, si può costruire una forma dichiarativa P(x) che traduce il seguente concetto: x è il numero di Gödel di un enunciato che può essere dimostrato nel sistema. Formalmente: P(x) può essere dimostrata se x è il numero di Gödel di un enunciato dimostrabile, e la sua negazione ¬P(x) può essere dimostrata se non lo è.

A questo punto possiamo arrivare al nocciolo della dimostrazione di Gödel :
Diciamo che una forma dichiarativa F(x) è auto-indimostrabile se e solo se F(G(F)) non è dimostrabile.
Questo passaggio è subito evidente se consideriamo:

a. G(F) come il numero di Gödel che identifica F
b. F(x) così definita: F(x): "X ha la proprietà espressa da F"

A questo punto infatti dire che F(G(F)) non è dimostrabile significa dire: non è dimostrabile che "la forma associata al numero che identifica la forma F ha la proprietà espressa da F",
Ovvero: non è dimostrabile che "F ha la proprietà espressa da F".
PERTANTO SE F(G(F)) NON È DIMOSTRABILE ALLORA F(X) È AUTO-INDIMOSTRABILE, CIOÈ AFFERMA LA SUA STESSA INDIMOSTRABILITÀ.

Definiamo ora la seguente forma dichiarativa:
S(z): "Z è il numero di Gödel che identifica una forma dichiarativa auto-indimostrabile"
In accordo con tale definizione si ha *z=G(F)* per una qualche forma dichiarativa *F(x)* tale che *F(G(F))* non è dimostrabile.
Consideriamo ora la seguente forma dichiarativa:

S(G(S))
Essa equivale a:
"IL NUMERO DI GÖDEL CHE IDENTIFICA S È IL NUMERO DI GÖDEL CHE IDENTIFICA UNA FORMA AUTO-INDIMOSTRABILE"
cioè:
S È AUTO-INDIMOSTRABILE
Intuitivamente, quando ci si chiede se p è vero, ci si pone la domanda: "La proprietà d'essere auto-indimostrabile è di per se stessa auto-indimostrabile?" Tutto ciò ricorda molto da vicino il paradosso del barbiere che racconta di quel barbiere che rade unicamente quelle persone che non si radono da sole: chi rade il barbiere?

E' ora chiaro che *S(G(S))* coincide con l'enunciato *p* introdotto all'inizio. Infatti dire che *S(G(S))* è vero equivale a dire che *S(G(S))* non è dimostrabile; lo stesso accade con *p*: se *p* è vero *p* non è dimostrabile.
Possiamo allora concludere:

$$p = S(G(S)) \qquad (1)$$

Cioè, abbiamo trovato un metodo per descrivere quell'enunciato all'interno della teoria stessa.

Assumiamo un sistema coerente:

CASO A: P È DIMOSTRABILE

Se *p* è dimostrabile, dunque vero, allora per la (1) è vera anche *S(G(S))* e dunque *G*(S) è il numero di Gödel di una forma proposizionale auto-indimostrabile (per com'è definita *S*); dunque *S* è una forma proposizionale auto-indimostrabile. Ciò implica per la definizione d'auto-indimostrabilità che *S(G(S))* non è dimostrabile e dunque *p* non è dimostrabile. Si giunge dunque ad una contraddizione con l'ipotesi e pertanto essa è falsa (dimostrazione per assurdo). Conclusione: *p* non è dimostrabile.

CASO B: LA NEGAZIONE DI P, CIOÈ ¬P, È DIMOSTRABILE

Se ¬*p* è dimostrabile, dunque vero, allora per la (1) è vera anche ¬*S(G(S))* e dunque *G(S)* non è il numero di Gödel di una forma proposizionale auto-indimostrabile; dunque *S* non è una forma auto-indimostrabile. Ciò implica che *S(G(S))* è dimostrabile e dunque *p* è dimostrabile. Se *p* è allora vero, non può essere vero anche ¬*p*. Si giunge dunque ad un'altra contraddizione. Conclusione: ¬*p* non è dimostrabile.

Quindi l'enunciato *p* non può essere né dimostrato né confutato all'interno del nostro sistema. Dato che p è vera e insieme formalmente indecidibile,gli assiomi dell'aritmetica non sono completi. In altre parole,non possiamo dedurre tutte le verità aritmetiche dagli assiomi. Inoltre Gödel dimostrò che anche se si aggiungesse altri assiomi aggiuntivi tali da permettere la formale deduzione della proposizione p, esisterebbe comunque un'altra proposizione vera,ma non dimostrabile.

DIMOSTRAZIONE DEL SECONDO TEOREMA DI GÖDEL

Sia p l'enunciato indecidibile costruito prima, e si assuma che la coerenza del sistema sia dimostrabile all'interno del sistema stesso (ipotesi). Il primo teorema di Gödel mostra che se il sistema è coerente, allora p non è dimostrabile.

L'affermazione "p non è dimostrabile" può essere dimostrata nel sistema (è ciò che ha fatto il primo teorema di Gödel).

Ma quest'ultima affermazione è equivalente allo stesso enunciato p, quindi p può essere dimostrato nel sistema. Questa contraddizione conduce ad un assurdo: il sistema deve essere allora incoerente (dimostrazione per assurdo).

Conclusioni

Il significato delle conclusione di Gödel è di grande portata:mostrano che la prospettiva di trovare per ogni sistema deduttivo(e quindi in particolare per un sistema nel quale l'intera aritmetica possa venir espressa) una dimostrazione assoluta è impossibile. Esse mostrano anche che esiste un numero infinito di proposizioni aritmetiche vere che non possono essere dedotte formalmente da alcun insieme d'assiomi mediante un insieme chiuso di regole d'inferenza. Ne segue che un approccio assiomatico alla teoria dei numeri , non può esaurire il dominio delle verità aritmetiche.

La prova di Gödel non dovrebbe essere interpretata come un invito a disperare o come una scusante per coloro che vendono misteri. La scoperta ch e vi sono delle verità aritmetiche che non possono essere formalmente dimostrate non significa che vi siano delle verità che non riusciremo mai a conoscere,p che una sorta d'intuizione "mistica" debba sostituire le prove rigorose. D'altra parte, secondo molti, la lezione da trarre è che le nostre capacità razionali e,in generale, le risorse del pensiero umano , non si lasciano completamente racchiudere da un sistema formale. D'altra parte queste limitazioni dei sistemi formali sono state stabilite proprio da una procedura logico-matematica, sicché il trascendimento della logica formale potrebbe essere una specie di "autotrascendimento". Il che consentirebbe di dare un senso inatteso alla sezione 6.13 del Tractatus di Wittegenstein, in cui afferma "La logica è trascendentale".

Bibliografia

- Abbagnano, N., & Fornero, G. (2000). *Protagonisti e Testi della Filosofia* (Vol. D Tomo 1). Paravia.
- Berto, F. (2007). *Logica da zero a Gödel*. Editori Laterza.
- Boyer, C. B. (1976). *Storia della matematica*. Milano: I.S.E.D.I.
- Cioffi, F., Gallo, F., Luppi, G., Vigorelli, A., & Zanette, E. (1998). *Il testo filosofico* (Vol. 3.1). Milano: Edizioni Scolastiche Bruno Mondadori.
- Franzen, T. (2005). *Gödel's Theorem:An incomplete guide to its use and its abuse*. Wellesley: Peters.
- Lolli, G. (2007). *Sotto il segno di Gödel*. Bologna: Socièta editrice il Mulino.

- Nagel, E., & Newman, J. R. (1974). *La prova di Gödel*. Torino: Bollati Boringhieri.
- Odifreddi, P. (s.d.). *Metamorfosi di un teorema*. Tratto il giorno Maggio 2008 da Vialattea.net: http://www.vialattea.net/odifreddi/godel.htm
- *Opere.Kurt Gödel* (Vol. 1-2). (1999). Bollati Boringhieri.
- *Teoremi di incompletezza*. (s.d.). Tratto il giorno Maggio 25, 2008 da http:\\it.wikipedia.org

SOMMARIO