Misure riguardanti triangoli, parallelogrammi, poligoni regolari e cerchio

ELEMENTI DI GEOMETRIA PIANA. MISURE RIGUARDANTI TRIANGOLI, PARALLELOGRAMMI, POLIGONI REGOLARI, CERCHIO

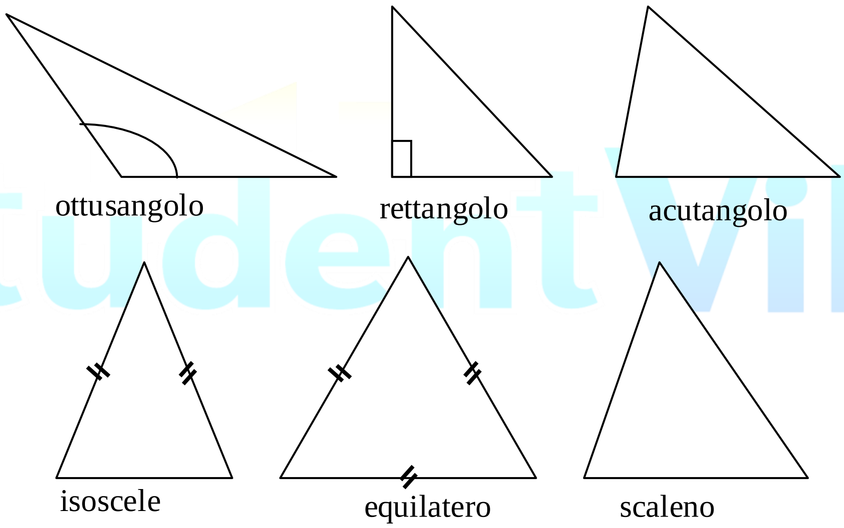
La geometria piana si occupa delle figure geometriche nel piano. A partire dal concetto primitivo di retta, vengono costruiti i segmenti, e quindi i poligoni come il triangolo, il quadrato, il pentagono, l'esagono, ecc. Le quantità numeriche importanti nella geometria piana sono la *lunghezza dei lati, il perimetro, la misura degli angoli e l'area*.

TRIANGOLI

Si definisce triangolo una partizione di piano limitato da una linea spezzata chiusa avente tre lati e tre vertici.

Rispetto agli angoli si possono definire tre tipi di triangoli: il triangolo **acutangolo** che ha tutti gli angoli minori di 90°, il triangolo **ottusangolo** che ha un angolo maggiore di 90°, il triangolo **rettangolo** che ha un angolo uguale a 90°. Rispetto alle misure dei lati un triangolo può essere: **isoscele** se ha due lati congruenti, **equilatero** se ha i tre lati congruenti, **scaleno** se ha tutti i lati di misure diverse.

Il triangolo isoscele ha anche due angoli congruenti. Il triangolo equilatero ha tutti gli angoli congruenti e misurano tutti 60°.



PROPRIETÀ DEI TRIANGOLI

Si ricorda che:

- **La somma degli angoli interni di un triangolo è sempre uguale ad un angolo piatto (180°)**
- **In un triangolo, un angolo esterno è la somma dei due angoli interni non adiacenti ad esso.**
- **Un triangolo può avere un solo angolo retto o un solo angolo ottuso. Gli altri due sono sempre acuti.**

Se in un triangolo sono note le ampiezze di due qualsiasi suoi angoli interni α e β, si può conoscere l'ampiezza del terzo angolo mediante la formula: $\gamma = 180° - \alpha - \beta$

CALCOLO DEL PERIMETRO E DEI LATI DI UN TRIANGOLO, NEI DIVERSI CASI.

Se il triangolo è equilatero, il perimetro P si trova moltiplicando la misura di un lato per tre; se il triangolo è isoscele si moltiplica la misura di uno dei due lati uguali per due e si aggiunge al

risultato la misura della base; se il triangolo è scaleno occorre sommare la misura di un lato con quella degli altri due.
Dato il perimetro di un triangolo, se esso è equilatero per trovare la lunghezza di un alto, si divide il valore del perimetro per tre. Se il triangolo è isoscele, dato il perimetro e la lunghezza della base, per trovare la lunghezza dell'altro lato si sottrae al perimetro la misura della base e si divide il risultato per due. Nel caso vengano assegnati, in un triangolo isoscele, il perimetro ed uno dei lati uguali, per trovare il valore della base si moltiplica la misura del lato per due e si sottrae dal valore del perimetro, questo risultato.

CALCOLO DELL'AREA DEI TRIANGOLI; FORMULE DIRETTE ED INVERSE

L'area di un triangolo si trova moltiplicando uno dei tre lati (base *b)* per l'altezza relativa h e dividendo il risultato per due: $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

Per trovare la base, data area e altezza, c'è la formula inversa: $b = \frac{2 \cdot A}{h}$

Per trovare l'altezza data l'area e la base, la formula è: $h = \frac{2 \cdot A}{b}$.

Per base possiamo utilizzare uno qualunque dei tre lati di un triangolo con l'accortezza di prendere sempre per altezza, l'altezza relativa al lato considerato.
Casi particolari:

TRIANGOLO RETTANGOLO

Nel triangolo rettangolo l'altezza coincide con uno qualunque dei cateti, per cui è sufficiente moltiplicare tra loro i due cateti e dividere il risultato per due. Le formule per ricavare un cateto dall'area sono uguali a quelle viste per i triangoli con la precisazione che, preso uno dei due cateti come base, l'altro costituisce l'altezza relativa.

$A = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} \qquad c_1 = \frac{2 \cdot A}{c_2}$

TRIANGOLO RETTANGOLO ISOSCELE

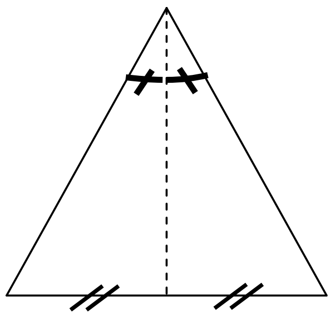
In un triangolo rettangolo isoscele i cateti sono uguali, le formule diventano: $A = \frac{1}{2}c^2 \quad c = \sqrt{2 \cdot A}$.

TRIANGOLO ISOSCELE

Nel caso si scelga come base b il lato diverso dagli altri due, l'altezza relativa h divide la base in due parti uguali (proprietà dei triangoli isosceli): quindi l'altezza è anche *mediana* rispetto alla base; inoltre conoscendo il valore della base $b = 2a$ e quello l dei lati uguali, si può ricavare il valore dell'altezza h dal teorema di Pitagora: $h = \sqrt{l^2 - a^2}$

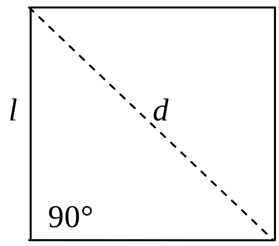
Per trovare la base b a partire dall'altezza h e dal lato l: $b = 2\sqrt{l^2 - h^2}$

L'altezza relativa alla base divide l'angolo opposto ad essa in due parti uguali: pertanto l'altezza è anche *bisettrice* dell'angolo al vertice.



L'altezza è mediana e bisettrice

Un caso particolare di triangolo isoscele è quello avente gli angoli alla base che misurano ciascuno 45°; questo si può pensare, infatti, come metà di un quadrato in cui i lati uguali sono i lati del quadrato; tale triangolo è anche rettangolo in quanto l'angolo formato dai due lati uguali misura 90°.

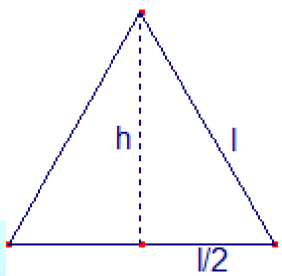


In questo caso la formula per trovare l'ipotenusa d, che corrisponde alla diagonale del quadrato, a partire dai lati l (cateti) è per il teorema di Pitagora $d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$

Volendo ottenere l a partire da d si ha: $l = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$

IL TRIANGOLO EQUILATERO

Un triangolo equilatero ha tutti e tre i lati l uguali e tutti e tre gli angoli uguali, ciascuno di 60 °. In tale triangolo qualsiasi altezza h divide in due parti uguali ciascun lato l che diventa la base di riferimento e divide in due parti uguali anche l'angolo opposto, quindi ciascuna altezza è anche **mediana** e **bisettrice**.



Dal teorema di Pitagora si ha:

$$h = \sqrt{l^2 - (l/2)^2} = \sqrt{3l^2/4} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

Per l'area del triangolo equilatero si ottiene:

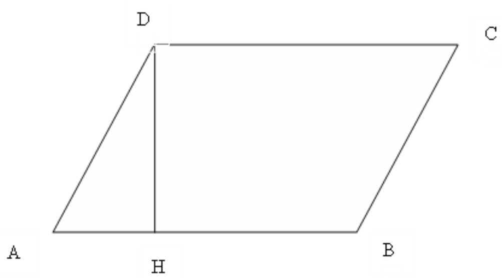
$$Area = (l/2)xh = (l/2)x(l/2)\sqrt{3} = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}$$

PARALLELOGRAMMI

I parallelogrammi sono poligoni che hanno i lati opposti paralleli e congruenti a due a due; per esempio, nel rettangolo ci sono due coppie di lati opposti paralleli, perché sia i due lati più lunghi che i lati più corti sono paralleli e uguali tra loro.

Come è facilmente verificabile, fanno parte dei parallelogrammi il romboide, il rettangolo, il quadrato, il rombo, ma anche l'esagono regolare, ecc.

La maggior parte dei parallelogrammi che vengono studiati sono dei quadrilateri e dunque sono, oltre al parallelogramma generico, il rettangolo, il rombo ed il quadrato.



Il perimetro del parallelogramma si trova sommando i lati diversi e moltiplicando il risultato per due: P= 2 (AB + AD).

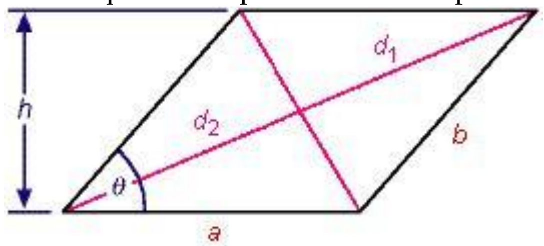
L'area si calcola moltiplicando un lato preso come base per l'altezza relativa a quella base.

Nella figura : Area = AB x DH.

La somma degli angoli interni di un parallelogramma è uguale ad un angolo di 360° (angolo giro).

ROMBO

Un rombo è un parallelogramma avente tutti i lati uguali tra loro (in figura a = b). Il perimetro si calcola quindi semplicemente moltiplicando la misura del lato per quattro.



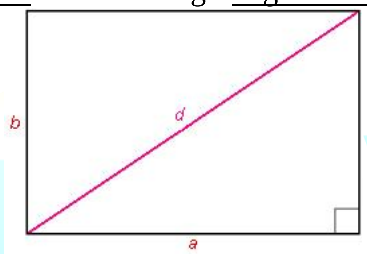
Proprietà del rombo:

- le diagonali d_1 e d_2 sono perpendicolari tra loro
- le diagonali d_1 e d_2 si intersecano nel loro punto medio, per cui dividono il rombo in quattro triangoli uguali tra loro, avendo ciascuno di essi uguali due lati e l'angolo compreso (retto)

Da questa proprietà, osservando che l'area del rombo è la somma delle aree dei quattro triangoli rettangoli uguali, si ricava facilmente la formula: $A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, diagonale maggiore per diagonale minore diviso 2.

RETTANGOLO

Si dice rettangolo un <u>parallelogrammo</u> avente tutti gli <u>angoli congruenti.</u>



Il perimetro si calcola come per il parallelogramma. Inoltre essendo uno dei due lati perpendicolare all'altro, un lato fa da base e l'altro fa da altezza, quindi l'area si determina moltiplicando i due lati tra loro:

Area = a x b

Per trovare la diagonale del rettangolo occorre applicare il teorema di Pitagora ad uno dei due triangoli in cui resta diviso dalle diagonali: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proprietà del rettangolo

- I lati opposti sono congruenti.
- Gli angoli sono tutti retti.
- Le diagonali sono congruenti e s'intersecano nel centro di simmetria

QUADRATO

Un quadrato è un parallelogramma con gli angoli ed i lati congruenti.

Il perimetro di un quadrato si trova moltiplicando la misura di un lato per quattro: P= 4 x l

L'area si trova moltiplicando il lato per se stesso: Area = l x l= l^2

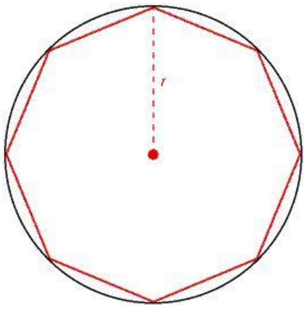
Proprietà

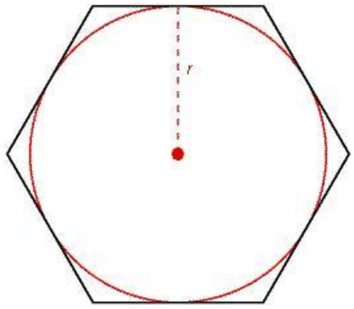
- Un quadrato ha le diagonali congruenti, perpendicolari fra di loro e bisettrici degli angoli.
- La diagonale d si trova applicando il teorema di Pitagora ad uno dei due triangoli in cui resta diviso dalle sue diagonali, considerando che i lati sono uguali: $d = \sqrt{l^2 + l^2} = l\sqrt{2}$

POLIGONI

Si dice poligono una regione di piano delimitato da una spezzata chiusa convessa, aventi un numero di lati qualsiasi.
Quindi sono poligoni i quadrilateri, i pentagoni, gli esagoni ecc.
Di particolare importanza sono i poligoni “regolari”.
Un poligono regolare è un poligono cha ha i lati e gli angoli uguali. Sono poligoni regolari: il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono regolare, l’ esagono regolare, l’ettagono regolare, l’ottagono regolare …
Teorema. La somma degli angoli esterni di un poligono è uguale a due angoli piatti (180°).
La somma degli angoli interni di un poligono è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due. Per esempio in un poligono di 7 lati la somma degli angoli interni è 5x180°=900°.

POLIGONI INSCRITTI E CIRCOSCRITTI A UNA CIRCONFERENZA



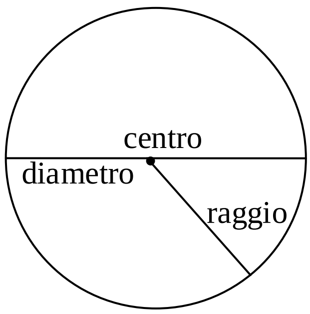


Nella prima figura, un ottagono regolare inscritto in un cerchio. Nella seconda figura, un esagono regolare circoscritto ad un cerchio.
Quando i vertici di un poligono giacciono su un cerchio si dice che il poligono è **inscritto**, quando invece ogni lato del poligono è tangente alla circonferenza si dice che il poligono è **circoscritto**.
I centri dei cerchi delle circonferenze inscritte e circoscritte di ogni poligono regolare coincidono.
Si definisce **apotema** di un poligono regolare il raggio del cerchio inscritto.
In un poligono regolare, se dividiamo l’apotema per il lato otteniamo un numero, detto numero fisso che dipende dal numero di lati che ha il poligono: $f=\frac{a}{l}$.
L’area di un poligono regolare si calcola moltiplicando il perimetro per l’apotema e dividendo il risultato per due. Oppure moltiplicando il quadrato del lato per un altro numero fisso: $A=l^2\cdot\varphi$
Si riportano i numeri fissi per il calcolo dell’area di alcuni poligoni regolari.

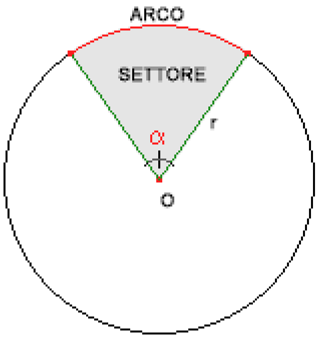
Poligono regolare	**φ**
Triangolo	0,433
Quadrato	1
Pentagono	1,720
Esagono	2,598
Ettagono	3,634
Ottagono	4,828
Ennagono	6,182
Decagono	7,694

CIRCONFERENZA E CERCHIO

La **circonferenza** è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso, detto **centro.**
Il **cerchio** è la parte di piano limitata da una circonferenza.
Raggio = r Diametro =2r
Lunghezza della circonferenza $C=2\pi r$
Area del cerchio $A=\pi r^2$



Lunghezza dell'arco di circonferenza: $l = \frac{C\alpha}{360}$ α misurato in gradi



Area del settore circolare:

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} ; \quad A = \frac{1}{2} r^2 \alpha$$